АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1967

УДК 621.317.08

Г. А. ШТАМБЕРГЕР
(Новосибирск)

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ, ПОДЛЕЖАЩИХ ИЗМЕРЕНИЮ

Объем и характер задач, решаемых с помощью современных методов электрических измерений, с каждым днем возрастает и усложняется. Если еще сравнительно недавно объектом измерений в основном были постоянные и изменяющиеся по синусоидальному закону напряжения, то в последнее время все чаще возникает необходимость в измерении характеристик периодических несинусоидальных и непериодических напряжений. Наглядным примером подобной ситуации являются геофизические методы исследований. В начале 50-х годов основные усилия геофизической общественности были направлены на развитие методов электроразведки постоянным током. На первой стадии развития (1955—1965 гг.) методы аэроэлектроразведки базировались на измерении гармонических электромагнитных полей. В последние годы все шире в практику внедряются методы переходных процессов и естественных электромагнитных полей, в первом из которых измерению подлежат характеристики периодических несинусоидальных напряжений, во втором — характеристики случайных сигналов.

Несмотря на то, что в электротехнике, корреляционной технике введен ряд определений характеристик различных видов переменных напряжений, нам кажется целесообразным уточнить некоторые из них, рассмотреть и систематизировать эти характеристики с точки зрения измерительной техники. В дальнейшем речь будет идти в основном об осредненных за определенный промежуток времени характеристиках переменных напряжений, играющих большую роль при определении свойств объектов и процессов.

Переменные электрические напряжения делятся на синусоидальные и несинусоидальные. В свою очередь, к группе несинусоидальных относятся периодические, почти-периодические и непериодические напряжения. Примером почти-периодического является амплитудно-модулированное напряжение. Осредненные характеристики различных видов напряжений, как нам кажется, целесообразно разделить на две группы: собственные и взаимные. Первая группа включает характеристики, относящиеся непосредственно к измеряемому напряжению; это характеристики, определяющие интенсивность измеряемого напряжения, выраженную через амплитудное, среднее и действующее значения. Ко второй группе относятся характеристики, устанавливающие непосредственно в процессе эксперимента определенную связь между двумя напряжениями: измеряемым и принимаемым в качестве образцового.

Рассмотрим кратко характеристики синусоидальных напряжений, от которых легко перейти к характеристикам напряжений более сложных форм. Напряжение, изменяющееся по синусоидальному закону, характеризуется, как известно, максимальным U_m, средним

$$U_{ср} = \frac{2}{T} \int\limits_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin \omega t dt$$

и действующим

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_0^T U_m^2 \sin^2 (\omega t + \varphi) dt}$$

значениями.

Все эти характеристики относятся в соответствии с принятым определением к группе собственных и являются различными формами выражения интенсивности синусоидального напряжения без учета начальной фазы φ.

При представлении синусоидального напряжения как вектора в полярной или декартовой системе координат используются характеристики, связанные не только с интенсивностью, но и с фазой измеряемого напряжения по отношению к фазе некоторого напряжения, принятого в качестве образцового (опорного). Так, в полярной системе координат комплексное напряжение $\dot{U}$ имеет вид $\dot{U} = U_m e^{j\varphi}$, в декартовой

$$\dot{U} = U_m \cos \varphi + j U_m \sin \varphi = U_с + j U_к, \tag{1}$$

где $U_с$ и $U_к$ — соответственно синфазная и квадратурная составляющие.

Подобные представления синусоидального напряжения имеют особый смысл, когда речь идет о вопросах, касающихся измерительной техники. Действительно, в соответствии с одним из предложенных в последнее время определением [1] «измерение есть процесс получения информации, заключающийся в сравнении опытным путем измеряемых и известных величин или сигналов, выполнении необходимых логических или вычислительных операций и представлении информации в числовой форме». В соответствии с этим определением акт сравнения, являющийся одним из наиболее существенных признаков измерения, выступает в наиболее наглядной форме, как прямое сравнение в случае измерения составляющих комплексного напряжения. При этом предполагается, что напряжение, принятое в качестве известного, определено по абсолютной величине, начальный фазовый сдвиг его равен нулю, и оно задает систему координат. В этой системе координат измеряются характеристики неизвестного напряжения: абсолютное значение, сдвиг фаз, синфазная и квадратурная составляющие.

Необходимо заметить, что формально синфазная и квадратурная составляющие неизвестного напряжения $u_x(t)$ могут рассматриваться как результат скалярного произведения двух векторов с последующим делением этого произведения на действующее значение образцового напряжения.

Действительно,

$$U_{cx} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T U_{0m}\sin\omega t\, U_{xm}\sin(\omega t+\varphi)\,dt}{U_0} = U_x\cos\varphi;$$

$$U_{кx} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T U_{0m}\cos\omega t\, U_{xm}\sin(\omega t+\varphi)\,dt}{U_0} = U_x\sin\varphi.$$

Такой принцип измерения составляющих широко используется на практике, в частности в тех случаях, когда в основу устройства положен синхронный детектор.

Измерительная техника располагает ныне большим арсеналом средств для измерения различных характеристик синусоидальных напряжений.

Подобно синусоидальным, периодически изменяющиеся несинусоидальные напряжения характеризуются также тремя собственными параметрами: максимальным значением за период, средним и действующим значениями. Методы и средства для измерения указанных величин широко известны в измерительной практике [2—5 и др.]. Оригинальные устройства для измерения действующих значений несинусоидальных периодических напряжений, обеспечивающие высокую точность измерения, разработаны в ИАЭ СО АН СССР под руководством канд. техн. наук И. Ф. Клисторина [6].

Все эти устройства позволяют определить только собственные характеристики периодического несинусоидального напряжения и исключают из рассмотрения фазовые соотношения между отдельными гармониками, хотя содержащаяся в них информация о процессе или объекте может представлять большой интерес. Поэтому при исследовании периодических несинусоидальных напряжений желательно пользоваться характеристиками, аналогичными характеристикам, описывающим синусоидальное напряжение,— амплитудным, средним и действующим значениям, синфазной, квадратурной составляющим и фазе. Что касается собственных характеристик несинусоидальных напряжений, то эти понятия четко определены и измерение соответствующих величин принципиальных затруднений не представляет. Понятия остальных характеристик требуют некоторых уточнений.

Исходя из соображений формальной аналогии соответствующих характеристик периодических синусоидальных [см. (1)] и несинусоидальных напряжений, *под синфазной составляющей периодического несинусоидального напряжения будем понимать напряжение, равное сумме синфазных составляющих отдельных гармоник*

$$U_c = U_1\cos\varphi_1 + U_2\cos\varphi_2 + U_3\cos\varphi_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\cos\varphi_n. \tag{2}$$

Соответственно *под квадратурной составляющей будем понимать* *напряжение, равное сумме квадратурных составляющих отдельных гармоник несинусоидального напряжения*

$$U_к = U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2 + U_3 \sin \varphi_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin \varphi_n. \qquad (3)$$

Наконец, *под фазовым углом несинусоидального напряжения будем в дальнейшем понимать арктангенс отношения квадратурной к синфазной составляющей*

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_к}{U_с} = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin \varphi_n}{\sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos \varphi_n}. \qquad (4)$$

Как указывалось, акт измерения предполагает непосредственное или косвенное сравнение исследуемого напряжения с напряжением, принятым в качестве образцового. Равным образом представление искомого напряжения через составляющие в любой из систем координат предполагает задание этой системы координат через напряжение, принятое в качестве образцового. Поэтому в дальнейшем невозможно будет обойтись без введения соответствующего понятия образцовых источников несинусоидальных периодических напряжений. Эти источники и должны задавать координатные системы. Очевидно, что следует говорить о некоторой многомерной координатной системе.

В качестве источника такого образцового напряжения может быть использован генератор напряжения сложной формы, образованного из числа μ гармоник основной частоты измеряемого напряжения, имеющих одинаковые амплитуды и нулевые начальные фазы. Напряжение такого генератора может быть выражено следующим образом:

$$U_0(t) = \sum_{n=1}^{\mu} U_{\text{о}m_n} \sin n\omega t = U_{\text{о}m} \sum_{n=1}^{\mu} \sin n\omega t, \qquad (5)$$

где $U_{\text{о}m}$ — амплитудное значение одной из гармоник.

В соответствии со сказанным применительно к синусоидальным напряжениям под синфазной составляющей измеряемого периодического несинусоидального напряжения будем также понимать среднее за период значение напряжения, полученного в результате умножения образцового $u_0(t)$ на измеряемое напряжение $u_x(t)$ и деления результата на действующее значение гармоники образцового напряжения:

$$U_{\text{с}x} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T U_{\text{о}m} \sum_{n=1}^{\mu} \sin n\omega t \sum_{n=1}^{\infty} U_{xm_n} \sin (n\omega t + \varphi_n)\, dt}{U_0}.$$

Так как среднее за период значение произведения мгновенных значений синусоид различной частоты равно нулю и тригонометрические ряды абсолютно сходятся при любых значениях ω, то

$$U_{\text{с}x} = \sum_{n=1}^{\mu} U_{x_n} \cos \varphi_n. \qquad (6)$$

Соответственно под квадратурной составляющей будем понимать среднее за период значение напряжения, получаемого в результате умножения напряжения $u_0^k(t)$, ортогонального исходному образцовому напряжению $u_0(t)$, на измеряемое напряжение $u_x(t)$ с последующим делением результата на действующее значение гармоники $u_0^k(t)$:

$$u_{kx} = \frac{\frac{1}{T}\int\limits_0^T u_0^k(t)\, u_x(t)\, dt}{U_0^k} = \sum_{n=1}^{\mu} U_{x_n} \sin \varphi_n. \qquad (7)$$

Фазовый угол между двумя напряжениями определяется через отношение квадратурной и синфазной составляющих

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\mu} U_{x_n} \sin \varphi_n}{\sum\limits_{n=1}^{\mu} U_{x_n} \cos \varphi_n}. \qquad (8)$$

Во всех последних выражениях T — период измеряемого и образцового напряжений; φ_n — фазовый угол между соответствующими гармониками обоих напряжений.

Напряжение, ортогональное исходному сложному напряжению, получается путем сдвига каждой из гармоник исходного напряжения на угол $\frac{\pi}{2}$ при сохранении постоянства амплитуд гармоник исходного напряжения. Практически реализовать подобную операцию возможно только в определенном частотном диапазоне, однако для общности рассуждений пока такого ограничения вводить нет необходимости. В результате сдвига каждой из гармоник исходного напряжения и последующего суммирования этих гармоник получается функция, ортогональная исходной, так как

$$\int\limits_0^T u_0^k(t)\, u_0(t) = 0.$$

Как известно, в формировании напряжения, полученного в результате перемножения и интегрирования двух периодических несинусоидальных напряжений, участвуют только те гармоники, которые одновременно содержатся в обоих напряжениях и не сдвинуты относительно друг друга на угол $\frac{\pi}{2}$. Составляющие спектра, имеющиеся только в одном из напряжений, в формировании таким путем синфазной и квадратурной составляющих не участвуют. Так, например, если имеются два сигнала

$$u_0(t) = U_{0m}\,[\sin \omega t + \sin 2\omega t + \sin 3\omega t]$$

и

$$u_x(t) = U_{xm_1} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{xm_2} \cos 2\omega t + $$
$$+ U_{xm_3} \sin(3\omega t + \varphi_3) + U_{xm_4} \sin(4\omega t + \varphi_4),$$

то в соответствии с принятыми определениями синфазная и квадратурная составляющие будут равны:

$$U_{cx} = U_{x_1} \cos \varphi_1 + U_{x_3} \cos \varphi_3;$$
$$U_{kx} = U_{x_1} \sin \varphi_1 + U_{x_2} + U_{x_3} \sin \varphi_3;$$

в их формировании не участвует четвёртая гармоника, имеющаяся только в напряжении $u_x(t)$.

Этот факт находится в полном соответствии с тем, что акт сравнения может быть осуществлен только между однородными величинами, и поскольку в приведенном примере в одном из напряжений отсутствует четвертая гармоника, то эту гармонику, имеющуюся в другом напряжении, не с чем сравнивать. Поэтому выбор напряжения, принятого в качестве образцового, не может быть сделан произвольно. Чаще всего удобнее формировать образцовое напряжение непосредственно из измеряемого или питать устройство сравнения и исследуемый четырехполюсник, выходное напряжение которого измеряется, от одного и того же источника периодического несинусоидального напряжения.

Кроме перечисленных, необходимо ввести еще одно понятие, определяющее интенсивность несинусоидального периодического напряжения как корень квадратный из суммы квадратов синфазной и квадратурной составляющих

$$U_{м} = \sqrt{U_{cx}^2 + U_{kx}^2} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\mu} U_{x_n} \cos \varphi_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\mu} U_{xn} \sin \varphi_n\right)^2}. \qquad (9)$$

Это соотношение назовем модулем несинусоидального периодического напряжения.

Модуль несинусоидального периодического напряжения оказывается удобной характеристикой интенсивности в случае измерения напряжения на фоне статистически независимых помех при использовании корреляционных методов выделения полезного сигнала.

Здесь нужно отметить существенную разницу между действующим значением несинусоидального периодического напряжения, определяемого суммой действующих значений гармоник этого напряжения, и значением модуля напряжения, формируемого за счет гармоник, имеющихся одновременно в измеряемом напряжении и напряжении, принятом в качестве образцового.

Мы приняли, что начальные фазы отдельных гармоник $u_0(t)$ равны нулю. В общем случае такое ограничение не является обязательным, поскольку каждая отдельная гармоника участвует в выполнении требуемых операций независимо от других и может рассматриваться как напряжение, задающее свою моногармоническую координатную систему. Точно так же при измерениях синусоидальных напряжений мы не задумываемся над фазой образцового напряжения и принимаем ее всегда равной нулю. При дифференцированном сравнении спектральных составляющих двух напряжений мы вправе принимать фазу отдельной гармоники образцового напряжения равной нулю, хотя начальные фазовые сдвиги отдельных гармоник этого напряжения не равны нулю.

При решении многих технических задач нет необходимости введения специального генератора сложной формы. Напряжение, принимаемое в процессе эксперимента в качестве опорного, может представлять собой произвольное напряжение с любым соотношением амплитуд и количеством гармоник. В этом случае в результате интегрирования произведения двух напряжений получим характеристики, которые удобно рассматривать как мощности несинусоидальных периодических токов [7]. Действительно, если $u_0(t)$ рассматривать как напряжение, приложенное к участку цепи, а $u_x(t)$ — как величину, пропорциональную току $i(t)$ в участке цепи, то определенный интеграл произведения

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} U_{m_n} \sin n\omega t \sum_{n=1}^{\infty} I_{m_n} \sin(n\omega t + \varphi_n)\, dt$$

представляет собой активную мощность периодического несинусоидального тока

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n. \tag{10}$$

Соответственно при использовании напряжения, ортогонального исходному $(u^k(t))$, получим реактивную мощность

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T u^k(t)\, i(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} U_{m_n} \cos n\omega t \sum_{n=1}^{\infty} I_{m_n} \sin \times$$

$$\times (n\omega t + \varphi_n)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n. \tag{11}$$

Кроме понятий активной и реактивной мощностей в электротехнике по аналогии с синусоидальными токами имеются понятия полной мощности S, определяемой как произведение действующих значений тока и напряжения

$$S = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}, \tag{12}$$

и коэффициента мощности

$$\cos\varkappa = \frac{P}{S}. \tag{13}$$

Квадрат полной мощности, обычно не равен сумме квадратов активной и реактивной мощности, поэтому в соответствии со сказанным выше величину

$$S_м = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{14}$$

будем называть модулем мощности несинусоидального периодического тока.

Равным образом понятие фазового угла, выражаемое как арктангенс отношения реактивной мощности к активной

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin\varphi_n}{\sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n}, \tag{15}$$

не будет совпадать с величиной фазового угла $\varkappa$, определяющего коэффициент мощности.

Кроме этих величин, в электротехнике используется также понятие мощности искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}, \tag{16}$$

отношение которой к полной мощности характеризует меру различия в формах кривых тока и напряжения.

Необходимо всегда учитывать, что в общем случае φ и $\varkappa$ существенно различаются, так как иначе можно было бы допустить следующую ошибку.

Приняв

$$\cos\varkappa = \frac{P}{S},$$

мы должны с равным основанием допустить, что

$$\sin\varkappa = \frac{Q}{S}.$$

Тогда, исходя из уравнения баланса мощностей

$$T^2 + Q^2 + P^2 = S^2$$

или

$$\frac{T^2}{S^2} + \frac{P^2}{S^2} + \frac{Q^2}{S^2} = 1,$$

получили бы условие

$$\frac{T^2}{S^2} = 0,$$

которое в общем случае несправедливо.

Несинусоидальные периодические функции имеют дискретный гармонический спектр, состоящий из спектральных линий с частотами гармоник, находящихся в простых кратных соотношениях. Конечно, отдельные гармоники, иногда даже первая, могут отсутствовать, т. е. амплитуды их могут равняться нулю, что, однако, не нарушает гармоничности спектра.

В практике встречаются не только периодические функции, обладающие дискретным спектром. Не меньшее значение имеют так называемые почти-периодические функции, представляющие собой сложные колебания, получаемые в результате сложения двух синусоидальных колебаний с несоизмеримыми частотами (например, ω и $\sqrt{2}\,\omega$). Такие колебания явно непериодические, однако их спектр дискретен и состоит из двух спектральных линий. В частности, большое практическое значение имеет случай почти-периодической функции, представляющий собой разложение вида

$$u(t) = \sum U_{m_n} \cos\left[(\omega_0 + n\,\omega)\,t - \varphi_n\right]. \tag{17}$$

Здесь n — число, принимающее как положительное, так и отрицательное значение.

Спектр, отвечающий этому разложению, характеризуется тем, что линии его эквидистантны, поэтому такого рода линейчатый спектр называется квазигармоническим [8]. Таковы, например, спектры периодических модулированных колебаний, где ω_0 — несущая частота; ω — частота модулирующего колебания.

При исследовании подобных сигналов основными параметрами являются амплитуды модулирующего, модулируемого колебаний и коэффициент модуляции. Однако очевидно, что в качестве характеристик подобных сигналов могут быть также использованы активная, реактивная составляющие, фазовый угол и модуль почти-периодического напряжения. Любое почти-периодическое колебание, состоящее из гармоник с несоизмеримыми частотами, может быть преобразовано в ортогональную функцию путем поворота каждой из гармоник на угол $\frac{\pi}{2}$ с последующим их суммированием. Такие два напряжения позволяют образовать многомерную координатную систему и с ее помощью определять взаимные характеристики исследуемых напряжений.

Принятые нами исходные представления можно развить применительно к случаю непериодической функции. При определенных допущениях (ограничении продолжительности процесса, спектра) заданная непериодическая функция может быть представлена интегралом Фурье

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

и

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{18}$$

В отличие от ряда Фурье интеграл Фурье выражает непериодическую функцию суммой синусоид с непрерывной последовательностью частот. Непериодическая функция отличается от периодической и тем, что в результате предельного перехода от ряда к интегралу Фурье дискретный спектр амплитуд переходит в сплошной. Подынтегральная функция формулы интеграла Фурье (18) выражает отдельное бесконечно малое слагаемое, т. е. колебание с бесконечно малой амплитудой

$$\frac{1}{\pi} S(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = d\, U e^{j\omega t},$$

откуда

$$S(\omega) = \pi \frac{dU}{d\omega}, \tag{19}$$

и, таким образом, характеризует не непосредственную амплитуду, а так называемую спектральную плотность.

Функции, описываемые интегралом Фурье, могут служить переходом к случайным величинам, т. е. величинам, случайным образом зависящим от какого-либо аргумента, в частности от времени. Измерение характеристик таких величин базируется на использовании статистических методов исследований [9—14 и др.].

Для эргодических стационарных случайных процессов математическое ожидание находится как среднее по времени

$$m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\,dt \qquad (20)$$

и равно некоторой постоянной величине.

Коэффициент корреляции, являющийся количественной мерой степени родства (корреляции) двух величин, зависящих от одного параметра, определяется из условия

$$r_{\text{в}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\,v(t)\,dt. \qquad (21)$$

Это так называемый ненормированный коэффициент корреляции.

Выражение (21) действительно лишь для процессов с нулевыми математическими ожиданиями ($m_u = m_v = 0$). В случае $m_u \neq 0$ и $m_v \neq 0$ ненормированный коэффициент корреляции будет выражаться следующим образом:

$$R_{\text{в}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [u(t) - m_u]\,[v(t) - m_v]\,dt. \qquad (22)$$

В корреляционной технике возникает необходимость в нормированной мере корреляции, численное значение которой лежит в пределах от -1 до $+1$. Нормированные коэффициенты корреляции имеют вид:

$$r_{\text{в. н}} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\,v(t)\,dt}{\sqrt{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u^2(t)\,dt \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} v^2(t)\,dt}}; \qquad (23)$$

$$R_{\text{в. н}} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [u(t) - m_u]\,[v(t) - m_v]\,dt}{\sqrt{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [u(t) - m_u]^2\,dt \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [v(t) - m_v]^2\,dt}}. \qquad (24)$$

По аналогии с рассмотренными уже понятиями коэффициенты корреляции, определяемые выражениями (21)—(24), следует называть вещественными коэффициентами корреляции. Далее можно использовать понятия мнимых коэффициентов корреляции, получаемых в результате операции интегрирования произведения одного из напряжений на второе напряжение, ортогональное исходному ($r_{м}$, $R_{м}$, $r_{м.н}$, $R_{м.н}$). Под модулем коэффициента корреляции будем понимать корень квадратный из суммы квадратов вещественного и мнимого коэффициентов корреляции, а под корреляционным фазовым углом — арктангенс отношения этих коэффициентов корреляции:

$$r = \sqrt{r_{в}^2 + r_{м}^2}\,; \tag{25}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{r_{м}}{r_{в}}\,. \tag{26}$$

Необходимо отметить, что модуль коэффициента корреляции всегда меньше корня квадратного из произведения дисперсии случайных величин

$$r < \sqrt{\sigma_u \sigma_v}$$

точно так же, как сумма квадратов активной и реактивной мощности, не равна полной мощности в участке цепи.

Равным образом корреляционный фазовый угол отличается от угла, характеризуемого нормированным коэффициентом корреляции (24). Как известно [15], нормированный коэффициент корреляции всегда равен единице или меньше ее и может рассматриваться как некоторый косинус угла между n-мерными векторами U и V. Нормированный коэффициент корреляции аналогичен в этом смысле коэффициенту мощности периодических несинусоидальных токов.

При рассмотрении подобных вопросов нужно обратить внимание на следующее обстоятельство. Измерение как физический эксперимент, включающий акт сравнения двух однородных величин, предполагает определение взаимной корреляции (связи) между двумя процессами. Это, однако, не означает, что при решении ряда практических задач не будет возникать необходимости в определении коэффициентов автокорреляции случайных величин. Коэффициент автокорреляции (собственная характеристика процесса)

$$r_{а}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u^2(t)\,dt \tag{27}$$

несет только информацию об интенсивности процесса без учета фазовых характеристик и соответствует квадрату действующего значения. Очевидно, что введение понятий вещественного, мнимого коэффициентов корреляции, модуля коэффициента корреляции и корреляционного фазового угла имеет смысл только при необходимости статистической оценки степени родства двух процессов, и, таким образом, эти характеристики связаны со взаимной корреляцией.

Далее следует рассматривать корреляционную функцию

$$\rho_{в}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\,v(t+\tau)\,dt. \tag{28}$$

Если при этом $u(t) = v(t)$, то речь идет о функции автокорреляции, если же $u(t) \neq v(t)$, то о функции взаимной корреляции.

В случае $\tau=0$ автокорреляционная функция

$$\rho_в(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u^2(t)\,dt=\sigma_u$$

обращается в дисперсию случайной величины.

При решении многих технических задач также речь может идти о вещественной функции корреляции $\rho_в(\tau)$ (28) и о мнимой функции корреляции $\rho_м(\tau)$, определяемой из условия

$$\rho_м(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u^k(t)\,v(t+\tau)\,dt. \tag{29}$$

В [15] подобная функция [для $u(t)=v(t)$] носит название «несимметричной автокорреляционной функции» или «взаимной автокорреляции». Следуя принятым определениям, относящимся как к синусоидальным, периодическим несинусоидальным функциям, считаем более правильным назвать эту функцию мнимой корреляционной функцией.

Авто- и взаимокорреляционные функции отражают свойства случайных процессов достаточно тонко и вряд ли потребуется введение понятий комплексных авто- и взаимокорреляционных функций.

Таким образом, нами рассмотрены наиболее важные характеристики различных видов переменных напряжений. К группе собственных характеристик относятся амплитудные, средние, действующие значения периодического напряжения, полная мощность, математическое ожидание и дисперсия. К группе характеристик, названных нами взаимными, будут относиться синфазная и квадратурная составляющие, фазовый угол, активная и реактивная мощности, модуль периодического несинусоидального напряжения, вещественный и мнимый коэффициенты корреляции, модуль коэффициента корреляции, корреляционный фазовый угол и корреляционные функции.

Как следует из приведенных соображений, имеется достаточно тесная аналогия между различными характеристиками синусоидальных, периодических несинусоидальных и непериодических напряжений. Это позволяет предположить возможность развития хорошо разработанных методов измерения характеристик синусоидальных напряжений применительно к более сложным случаям. В свою очередь, подобное развитие существующих методов измерений позволит в ряде случаев получить значительно бо́льшую информацию об исследуемых объектах или процессах, а иногда может оказаться просто необходимым, например, при геофизических исследованиях методом, основанным на использовании естественных электромагнитных полей Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б. Карандеев, В. И. Рабинович, М. П. Цапенко. К определению понятия измерения.— Измерительная техника, 1961, № 12.
2. Электрические измерения. Под ред. А. В. Фремке. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
3. Г. А. Ремез. Радиоизмерения. М., Связьиздат, 1960.
4. Г. Патриджж. Электронные измерительные приборы. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
5. Курс электрических измерений. Под ред. В. Г. Прыткова, А. В. Талицкого. М.—Л., Госэнергоиздат, 1960.
6. И. Ф. Клисторин. Цифровые вольтметры действующих значений.— Автометрия, 1966, № 2.

7. Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушия, С. В. Страхов. Основы теории цепей. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
8. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.
9. С. Гольдман. Теория информации. М.—Л., Изд-во иностр. лит., 1957.
10. А. А. Харкевич. Очерки общей теории связи. М., Гостехиздат, 1955.
11. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961.
12. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
13. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.
14. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
15. Ф. Ланге. Корреляционная электроника. Л., Судпромгиз, 1963.

Поступила в редакцию
13 февраля 1967 г.