ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., «Физматгиз», 1960.
2. Э. Л. Ицкович, Э. А. Трахттенгерц. Алгоритмы централизованного контроля и управления производства. М., «Советское радио», 1968.
3. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций.— Успехи математических наук, 1952, т. VII, вып. 5.

Поступила в редакцию 14 июля 1971 г.,
окончательный вариант — 23 декабря 1971 г.

УДК 519.24

А. А. МАЛИЦКИЙ

(Харьков)

О РАЦИОНАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Постановка задачи. В * рассмотрена задача рациональной организации процесса измерений постоянной величины Θ в случае, когда измеренная величина H представляет собой аддитивную смесь Θ и нестационарной нормальной помехи. Настоящая статья представляет собой продолжение и обобщение работы * на тот случай, когда одновременно измеряется несколько величин. Задача ставится следующим образом.

Измеряется некоторый вектор $\Theta=\{\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_p\}$. Результаты измерений H представляют собой аддитивную смесь Θ и векторной нестационарной нормальной помехи E:

$$H=\Theta+E.$$

В течение временного интервала $[T_н, T_к]$ необходимо провести n измерений вектора Θ, причем промежуток между соседними измерениями $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ должен быть не менее заданного Δt. Здесь t_k — момент проведения k-го измерения ($k=1, \ldots, n$). Длина заданного интервала $T_к-T_н$ позволяет провести более чем n измерений, т. е. $n\Delta t\leqslant\leqslant T_к-T_н$. Необходимо оптимально (в смысле выбранного критерия) определить моменты измерений.

Выбор критерия. В результате обработки измерений получают оценку вектора Θ — вектор Θ^*, степень близости которого к вектору Θ характеризуется матрицей вторых моментов K вектора Θ^*.

В связи с этим целесообразно критерий эффективности измерений связать с нéкоторой характеристикой матрицы K. Так, можно в качестве критерия выбрать след матрицы $\mathrm{Sp}K$ или ее определитель $|K|$.

Определитель $|K|$ представляет собой, как известно, объем параллелепипеда, построенного на столбцах матрицы K. В интересующем нас случае нормальной помехи он однозначно связан с энтропией закона распределения вектора Θ^*: чем меньше $|K|$, тем меньше энтропия и, следовательно, тем большую информацию доставили измерения. При использовании в качестве критерия $|K|$ естественно стремиться к его минимизации или, что то же самое, к максимизации определителя непосредственно получаемой в результате обработки данных измерений матрицы K^{-1}. Однако $|K|$ может оказаться малым вследствие того,

---

* А. А. Малицкий, Л. Г. Раскин. Некоторые вопросы рациональной организации процесса измерений.— Автометрия, 1969, № 4.

что мала ошибка в определении только одной компоненты вектора Θ^*, в то время как ошибки определения остальных компонент велики. Более того, если компоненты вектора Θ^* статистически зависимы, то может оказаться, что $|K|$ мал при больших ошибках определения всех компонент за счет того, что две компоненты вектора Θ^* сильно коррелированы. Однако в дальнейшем рассматривается случай независимости между измерениями различных компонент вектора Θ, т. е. матрица K — диагональная. При этом указанный недостаток $|K|$ не имеет места.

Если выбрать в качестве критерия $\mathrm{Sp}K$, то такой критерий будет свободен от недостатков, свойственных критерию в виде $|K|$.

По своему смыслу $\mathrm{Sp}K$ представляет собой квадрат расстояния в фазовом пространстве от точки Θ^* до точки, соответствующей истинному значению вектора Θ. Однако компоненты вектора Θ, как правило, оказываются по своей физической природе совершенно разнородными и имеющими разные размерности. В связи с этим дисперсии различных компонент вектора Θ также имеют различную размерность, что делает операцию суммирования их лишенной физического смысла. Правда, этот недостаток можно устранить переходом от вектора Θ к некоторому вектору A, все компоненты которого имеют одну размерность, но при этом выбор в качестве критерия следа матрицы вторых моментов D вектора A представлялся несколько искусственным. Кроме того, так как $\mathrm{Sp}K$ и $\mathrm{Sp}K^{-1}$ (или $\mathrm{Sp}D$ и $\mathrm{Sp}D^{-1}$) не связаны, то для работы с критерием в виде следа необходимо сначала обратить непосредственно получаемую матрицу K^{-1} (или D^{-1}), что ведет, особенно когда матрица K^{-1} (или D^{-1}) недиагональна, к серьезным техническим трудностям. Это в ряде случаев может сделать невозможным получение аналитического решения. В настоящей работе поставленная задача рассматривается как для критерия в виде $|K|$, так и для критерия в виде $\mathrm{Sp}K$ (при этом матрица K считается диагональной).

Построение математической модели. Как уже указывалось, будем предполагать, что отсутствует корреляция между измерениями различных компонент вектора Θ, а также между измерениями одноименных компонент, проведенными в различные моменты времени. При этом,

$$K^{-1} = \begin{Vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{1i}^2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{ji}^2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{pi}^2} \end{Vmatrix} \quad (j = 1, \dots, p),$$

где σ_{ji} — дисперсия ошибки измерения j-й компоненты вектора Θ в i-й момент времени.

Тогда задача формулируется следующим образом: найти набор $\{t_i^*\}$ $(i=1, \dots, n)$, максимизирующий $|K^{-1}|$ и удовлетворяющий ограничениям

$$t_i \in [T_н, T_к], \; t_k - t_{k-1} \geqslant \Delta t \;\; (k = 2, \dots, n).$$

Эта задача может быть сведена к стандартной задаче математического программирования:

найти набор $\{x_k^*\}$ $(k=1, \dots, n+1)$, максимизирующий целевую функцию

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \ln|K^{-1}| = \sum_{j=1}^{p} \ln \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji} \left\{ T_н + \sum_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\Delta t \right\} \qquad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = T_к - T_н - (n-1)\,\Delta t = T; \qquad x_k \geqslant 0; \quad k = 1, \ldots, n+1, \tag{2}$$

где

$$\varphi_{ji} = \frac{1}{\sigma_{ji}^2} = \varphi_j(t_i), \; x_k = \Delta t_k - \Delta t, \; \Delta t_1 = t_1 - (T_н - \Delta t), \; \Delta t_{n+1} = $$
$$= (T_к + \Delta t) - t_n.$$

Для решения этой задачи можно воспользоваться методом Лагранжа, который приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_k} + \omega_k = 0; \quad k = 1, \ldots, n+1; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0; \\ x_k \omega_k = 0; \\ x_k \geqslant 0; \\ \omega_k \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь

$$F = \Psi(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k - T \right).$$

Используя (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=s}^{n} \dfrac{\partial \varphi_1 \left\{ T_н + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\,\Delta t \right\}}{\partial x_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_1 \left\{ T_н + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\,\Delta t \right\}} + \cdots + \dfrac{\sum\limits_{i=s}^{n} \dfrac{\partial \varphi_p \left\{ T_н + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\,\Delta t \right\}}{\partial x_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_p \left\{ T_н + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\,\Delta t \right\}} + \\ + \lambda + \omega_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, n); \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = T; \\ x_k \omega_k = 0; \; k = 1, \ldots, n+1; \\ \lambda + \omega_{n+1} = 0; \\ x_k \geqslant 0; \\ \omega_k \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Вычитая из S-го уравнения системы (3) $(S+1)$-е, получим:

$$\begin{cases} \Phi_s = \omega_{s+1} - \omega_s; \quad s = 1, \ldots, n; \\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k = T; & (4) \\ x_k \omega_k = 0; \quad k = 1, \ldots, n+1; \\ x_k \geqslant 0; \quad \omega_k \geqslant 0. & (5) \end{cases}$$

Здесь

$$\Phi_s = \sum_{j=1}^{p} \frac{\dfrac{\partial \varphi_j \left\{ T_н + \sum\limits_{k=1}^{s} x_k + (s-1)\,\Delta t \right\}}{\partial x_s}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_j \left\{ T_н + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\,\Delta t \right\}}.$$

Решение системы (4), (5) определяет искомый набор $\{x_k^*\}$.

Основные теоремы. Проанализируем систему уравнений (4), (5). Если ошибки измерения каждой компоненты вектора Θ нарастают со временем $\left(\frac{d\varphi_j}{dt} < 0,\ j = 1, \ldots, p\right)$, то из (4) и (5) немедленно следует, что решение имеет вид $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $x_{n+1} = T$, т. е. измерения следует сосредоточить в начале интервала $[T_н, T_к]$. Точно так же, если $\frac{\partial\varphi_j}{dt} > 0$, то измерения следует сосредоточить в конце интервала. Впрочем, в этих случаях решение ясно и непосредственно и поэтому они из дальнейшего рассмотрения исключены.

Относительно функций $\varphi_j(t)$ предположим, что либо они все выпуклы вниз (функции $\sigma_j^2(t)$ выпуклы вверх), либо все они выпуклы вверх (функции $\sigma_j^2(t)$ выпуклы вниз). При выполнении этих условий, которые не являются на практике слишком обременительными, имеет место

лемма: если все функции $\varphi_j(t)$ выпуклы вверх, то $\Phi_s > \Phi_{s+1}$; если все функции $\varphi_j(t)$ выпуклы вниз, то $\Phi_s < \Phi_{s+1}$.

Доказательство. Рассмотрим j-е слагаемое ($j = 1, \ldots, p$) в выражениях для Φ_s и Φ_{s+1}. Их знаменатели равны и положительны. Числитель же j-го слагаемого в выражении для Φ_s по своему смыслу есть $\left.\frac{d\varphi_j}{dt}\right|_{t=t_s}$, числитель j-го слагаемого в выражении для Φ_{s+1} есть $\left.\frac{d\varphi_j}{dt}\right|_{t=t_{s+1}}$. Пусть теперь все φ_j выпуклы вниз. Тогда $\frac{d^2\varphi_j}{dt} > 0$, т. е. $\frac{d\varphi_j}{dt}$ есть монотонно возрастающая функция. Так как $t_{s+1} > t_s$, то $\left.\frac{d\varphi_j}{dt}\right|_{t=t_{s+1}} > \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_s}$, т. е. j-е слагаемое в выражении для Φ_{s+1} больше j-го слагаемого в выражении для Φ_s.

В силу произвольности выбора j отсюда следует, что $\Phi_{s+1} > \Phi_s$ и т. д. Доказательство в случае выпуклости функций φ_j вверх аналогично. Если s измерений ($s \leqslant n$) производятся в начале интервала наблюдений, а ($n-s$) измерений производятся в конце, т. е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = x_{s+2} = \ldots = x_{n+1} = 0$, $x_{s+1} = T$, то соответствующую ситуацию будем символически обозначать (s, $n-s$). Будем говорить, что вектор $X = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ принадлежит решению системы (4), (5), если существует такой вектор $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}\}$, что вектор $\{x_1, \ldots, x_{n+1}, \omega_1, \ldots, \omega_{n+1}\}$ является решением этой системы. Если функции $\varphi_j(t)$ выпуклы вниз, то имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы (s, $n-s$) принадлежало решению системы (4), (5), необходимо и достаточно, чтобы при $x_1 = \ldots = x_s = x_{s+2} = \ldots = x_{n+1} = 0$, $x_{s+1} = T$ имели место неравенства: $\Phi_s \leqslant 0$, $\Phi_{s+1} \geqslant 0$. (В силу $\Phi_{s+1} > \Phi_s$ хотя бы одно из неравенств будет строгим.)

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x_1 = \ldots = x_s = x_{s+2} = \ldots = x_{n+1} = 0$, $x_{s+1} = T$ принадлежит решению системы (4), (5). Из-за $x_k\omega_k = 0$ и $x_{s+1} = T$ имеем $\omega_{s+1} = 0$. Отсюда $\Phi_s = \omega_{s+1} - \omega_s = -\omega_s \leqslant 0$, $\Phi_{s+1} = \omega_{s+2} - \omega_{s+1} = \omega_{s+2} \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть в точке $x_1 = \ldots = x_s = x_{s+2} = \ldots = x_{n+1} = 0$, $x_s = T$ имеют место неравенства $\Phi_s \leqslant 0$, $\Phi_{s+1} \geqslant 0$. Очевидно, координаты этой точки удовлетворяют условиям $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = T$, $x_k \geqslant 0$. Остается доказать, что если эти значения x_k подставить в выражения для Φ_k ($k = 1, \ldots, n$), то значения ω_k, рассчитанные по формулам $\Phi_k = \omega_{k+1} - \omega_k$, будут удовлетворять условиям: $\omega_k \geqslant 0$, $x_k\omega_k = 0$. Так как $x_{s+1} = T > 0$, то выберем $\omega_{s+1} = 0$. Тогда $\Phi_s = \omega_{s+1} - \omega_s = -\omega_s$ и поскольку по условию $\Phi_s \leqslant 0$, то $\omega_s \geqslant 0$. Точно так же $\Phi_{s+1} = \omega_{s+2} - \omega_{s+1} = \omega_{s+2} \geqslant 0$.

По лемме $\Phi_{k+1}>\Phi_k$. Поэтому $\omega_2-\omega_1<\omega_3-\omega_2<\ldots<\omega_{n+1}-\omega_n$. В сочетании с условиями $\Phi_s\leqslant 0$, $\Phi_{s+1}\geqslant 0$ это дает:

$$\omega_2-\omega_1<0;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega_s-\omega_{s-1}<0;$$
$$\omega_{s+1}-\omega_s\leqslant 0;$$
$$\omega_{s+2}-\omega_{s+1}\geqslant 0;$$
$$\omega_{s+3}-\omega_{s+2}>0;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega_{n+1}-\omega_n>0,$$

т. е. $\omega_1>0, \ldots, \omega_{s-1}>0, \omega_s\geqslant 0, \omega_{s+1}=0, \omega_{s+2}\geqslant 0, \omega_{s+3}\geqslant 0, \ldots, \omega_{n+1}\geqslant\geqslant 0$ и т. д.

Следствие 1. Для того чтобы $(0, n)$ принадлежало решению системы (4), (5) (т. е. измерения проводятся в конце интервала), необходимо и достаточно, чтобы при $x_1=T$, $x_2=\ldots=x_{n+1}=0$ выполнялось неравенство $\Phi_1\geqslant 0$.

Следствие 2. Для того чтобы $(n, 0)$ принадлежало решению системы (4), (5) (все измерения проводятся в начале интервала), необходимо и достаточно, чтобы при $x_1=\ldots=x_n=0$, $x_{n+1}=T$ выполнялось неравенство $\Phi_n\leqslant 0$.

Теорема 2. Для того чтобы точка $x_1=\ldots=x_{s-1}=x_{s+2}=\ldots=x_{n+1}=0$, $0\leqslant x_s^*\leqslant T$, $x_{s+1}=T-x_s^*$ принадлежала решению системы (4), (5), необходимо и достаточно, чтобы она была корнем уравнения $\Phi_s=0$. Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. Теоремы 1 и 2 исчерпывают все возможные решения системы (4), (5).

Доказательство. Теорема 1 исчерпывает такие решения системы, в которых одна и только одна из переменных x_k $(k=1, \ldots, n+1)$ отлична от нуля, а остальные равны нулю. Теорема 2 исчерпывает такие решения, в которых две и только две смежных переменных x_s и x_{s+1} $(s=1, \ldots, n)$ отличны от нуля. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что среди решений системы (4), (5) нет таких, в которых две или более не смежных или три или более смежных переменных x отличны от нуля. Покажем это от противного.

Пусть среди решений системы есть такое, в котором две не смежных переменных x_s и x_{s+l} $(l\geqslant 2, s+l\leqslant n+1)$ отличны от нуля. Тогда в силу $x_k\omega_k=0$ имеем $\omega_s=\omega_{s+l}=0$ и, следовательно,

$$\Phi_s=\omega_{s+1}-\omega_s=\omega_{s+1}\geqslant 0;$$
$$\Phi_{s+l-1}=\omega_{s+l}-\omega_{s+l-1}\leqslant 0,$$

т. е. $\Phi_{s+l-1}\leqslant\Phi_s$, что невозможно ввиду $\Phi_{s+1}>\Phi_s$ и $l\geqslant 2$.

Аналогично доказывается, что среди решений системы нет таких, в которых более двух не смежных переменных x_k отличны от нуля.

Пусть среди решений системы (4), (5) есть такое, в котором $x_s\neq 0$, $x_{s+1}\neq 0$, $x_{s+2}\neq 0$ $(s\geqslant 1, s+2\leqslant n+1)$. Тогда $\omega_s=\omega_{s+1}=\omega_{s+2}=0$ и $\Phi_s=\Phi_{s+1}$, что также невозможно.

Аналогично доказывается, что среди решений системы (4), (5) нет таких, в которых более трех смежных переменных отличны от нуля.

Если $\varphi_j(t)$ выпуклы вверх $(j=1, \ldots, p)$, то имеет место теорема 4. Вектор $x_2=\ldots=x_n$, $x_1+x_{n+1}=T$ принадлежит всем решениям системы (4), (5).

Доказательство. Пусть среди решений системы (4), (5) есть такое, у которого при некотором s $x_s\neq 0$ $(s\neq 1, s\neq n+1)$, т. е. $\omega_s=0$. Тогда $\Phi_{s-1}=\omega_s-\omega_{s-1}\leqslant 0$, $\Phi_s=\omega_{s+1}-\omega_s=\omega_{s+1}\geqslant 0$ и, следовательно, $\Phi_s\geqslant\Phi_{s-1}$, что невозможно, так как противоречит лемме.

Доказанная теорема сводит исходную задачу определения точки, в которой функция n переменных $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ достигает наибольшего значения, к задаче определения точки, в которой достигает наибольшего значения функция одной переменной $\Psi(x_1, 0, \ldots, 0)$. Решение этой последней задачи не представляет труда, тем более, что функция $\Psi(x_1)$ является выпуклой вверх. Это следует из того, что если некоторая функция $f(x)$ выпукла вверх, то и $\ln f(x)$ также является функцией выпуклой вверх. В заключение отметим, что при выборе в качестве критерия SpK система (4), (5) будет иметь тот же вид, но при этом

$$\Phi_s = \sum_{j=1}^{p} \frac{\dfrac{\partial \varphi_j \left\{T_{\text{н}} + \sum\limits_{k=1}^{s} x_k + (s-1)\Delta t\right\}}{\partial x_s}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_j \left\{T_{\text{н}} + \sum\limits_{k=1}^{i} x_k + (i-1)\Delta t\right\}\right]^2}.$$

Если все $\varphi_j(t)$ выпуклы в одну сторону, то лемма и теоремы 1—4 остаются в силе и в этом случае.

Поступила в редакцию 4 марта 1971 г.,
окончательный вариант — 10 апреля 1972 г.

УДК 519.2 : 62-50

В. П. КУЗНЕЦОВ, Е. П. ЧУРАКОВ
(Рязань)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНКИ ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ МНОГИМИ УСТРОЙСТВАМИ В УСЛОВИЯХ ГАУССОВЫХ ШУМОВ

Введение и постановка задачи. В различного рода задачах автоматической обработки информации, связанных с проблематикой систем управления, распознавания образов, радиолокации, гидроакустики и т. п., возникает необходимость отыскания оптимальной оценки $\hat{\vec{\vartheta}}$ некоторого вектора $\vec{\vartheta}$ размерности ν на основании измерений, проведенных $r > \nu$ устройствами. Суть задачи сводится к следующему: информация о мгновенном значении вектора $\vec{\vartheta}$ выдается r устройствами в виде некоторых нелинейных функций, искаженных шумами, так что

$$v_i = f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i) + p_i; \quad i = \overline{1, r}, \tag{1}$$

где v_i — показание i-го прибора; $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i)$ — полезная составляющая сигнала; p_i — шум. Предполагается, что параметр $\vec{\vartheta}$ принадлежит некоторой известной и ограниченной области Г, а каждый из измерительных приборов настроен на определенное фиксированное значение вектора $\vec{\vartheta}$ в этой области, так что совокупность этих значений с некоторым шагом дискретности заполняет область Г. Последнее обстоятельство приводит к тому, что $f(\vec{\vartheta}, \vec{Q}_i) = \max$ при $\vec{\vartheta} = \vec{Q}_i$, где $\vec{Q}_i$ — вектор, ха-