Главный член дисперсии ошибки для h-кратного интегрирования (при $\sqrt{q_0}\gg 1/2$) определяется на основе (25) в виде

$$\widetilde{k}_{h+1,h+1}\simeq 2C_{2(h-1)}^{(h-1)}\frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|}\frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!}-C_{2(h-1)}^{(h-1)}\frac{\widetilde{k}_{11}^2K}{|\widetilde{f}|^2}\frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!}. \qquad (38)$$

С учетом выражения (35) и соотношения $\widetilde{f}=-\alpha-\widetilde{k}_{11}K$ находим

$$\widetilde{k}_{h+1,h+1}=C_{2(h-1)}^{(h-1)}\frac{\sigma_\lambda^2}{q_0\alpha}\frac{(1+4q_0)^{1/2}-1}{2(1+4q_0)^{1/2}-1}\frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!}. \qquad (38)$$

Используя (32), получим аналогичное выражение для дисперсии псевдооценки (31). В силу (32) (при $q_0\gg 1$) имеем

$$\widetilde{k}_{h+1,\,h+1}/\widetilde{d}_{h+1,\,h+1}=1/2.$$

Таким образом, оптимальный алгоритм интегрирования дает в два раза меньшую дисперсию ошибки по сравнению с неоптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. I. М., «Сов. радио», 1974.
2. В. И. Тихонов, Н. К. Кульман. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., «Сов. радио», 1975.
3. Г. Ван-Трис. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. I. М., «Сов. радио», 1972.

Поступила в редакцию 27 января 1976 г.

УДК 62-50 : 519.92

Н. С. ДЕМИН

(Томск)

ОПТИМАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задачи оптимального оценивания состояний динамических систем [1], синтеза фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем [2], передачи сообщений [3] и некоторые другие часто сводятся к следующей схеме: по измерениям на интервале $[t_0, \xi]$ случайного процесса $z(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant\xi$, который будем обозначать z_0^ξ, найти оценки случайного процесса $x(t)$ в каждой точке $t=\tau$, $\tau\geqslant t_0$. При этом в зависимости от соотношений между моментом оценивания τ и моментом окончания наблюдений ξ процедуры оценивания бывают трех типов: 1) $\tau=\xi$ — фильтрация; 2) $\tau>\xi$ — предсказание (или экстраполяция); 3) $\tau<\xi$ — сглаживание (или интерполяция). В свою очередь, процедуры сглаживания подразделяются также на три типа: а) сглаживание в фиксированной точке (или прямая интерполяция) [1, 4, 5]; б) сглаживание на фиксированном интервале (или обратная интерполяция) [1, 4, 6, 7]; в) сглаживание с постоянным запаздыванием [1].

В данной работе рассматривается задача сглаживания с постоянным запаздыванием для нелинейных стохастических систем с нелинейным каналом измерений. Получено уравнение для совместного апостериорного распределения значений вектора состояния системы в момент оценивания и в момент окончания наблюдений, из которого при гауссовой аппроксимации этого распределения и квадратичной аппроксимации нелинейных функций системы и канала измерений выведены уравнения сглаживающего с постоянным запаздыванием фильтра.

Постановка задачи. Рассматривается система, описываемая уравнением

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+\Phi_1(t,x(t))dw_1(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния объекта, f — n-мерная вектор-функция, Φ_1 — матрица размерности $(n\times r_1)$, $w_1(t)$ — r_1-мерный стандартный винеровский процесс [8]. Измеряется процесс $z(t)$, реализации которого задаются на решениях уравнения

$$dz(t)=h(x(t),t)dt+\Phi_2(t)dw_2(t), \tag{2}$$

где $z(t)$ — m-мерный вектор измерений, h — m-мерная вектор-функция, Φ_2 — матрица размерности $(m\times r_2)$, $w_2(t)$ — r_2-мерный стандартный винеровский процесс, независимый от $w_1(t)$. Считаем, что правые части уравнений (1), (2) удовлетворяют ограничениям, принятым в теории стохастических дифференциальных уравнений [8, 9] и оптимальной нелинейной фильтрации [4]. Уравнения (1), (2), а также стохастические дифференциальные уравнения, которые будут получены в дальнейшем, понимаются в смысле Ито [8, 9]. Плотность вероятности $p_0(x)=\partial P\{x(t_0)\leqslant x\}/\partial x$ значений процесса $x(t)$ в начальный момент времени t_0 предполагается заданной ($P\{A\}$ — вероятность события A).

Задача. По реализации z_0^{t+T} наблюдаемого процесса $z(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t+T$, $T=\text{const}$, найти оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку сглаживания с постоянным запаздыванием $m(t,\ t+T)$ для вектора состояния $x(t)$ системы (1) в момент времени t.

Как известно [4], оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой является апостериорное среднее $m(t,\,t+T)=M\left[x(t)\,|\,z_0^{t+T}\right]$ (M — оператор математического ожидания), т. е. проблема оценивания в общем нелинейном случае связана с нахождением апостериорного распределения $p_t^{t+T}(x)=\partial P\{x(t)\leqslant x\,|\,z_0^{t+T}\}/\partial x$. Соответствующая задача фильтрации рассматривалась в ряде работ [3, 10—13], в которых задача нахождения оценки $m(\xi)=M\left[x(\xi)\,|\,z_0^{\xi}\right]$ вектора состояния $x(t)$ системы (1) сводилась к задаче нахождения моментов [3, 10, 13] либо семиинвариантов [11, 12] для апостериорного распределения $p_\xi(x)=\partial P\{x(\xi)\leqslant x\,|\,z_0^{\xi}\}/\partial x$; при этом аппроксимация $p_\xi(x)$ распределением с конечным числом моментов либо семиинвариантов приводила к конечной системе уравнений, описывающих субоптимальный фильтр. В данной работе для решения поставленной задачи применяется метод семиинвариантной функции. При этом оказывается, что вместо $p_t^{t+T}(x)$ удобнее использовать совместную апостериорную плотность $p_t^{t+T}(x,\,x')=\partial^2 P\{x(t)\leqslant x,\ x(t+T)\leqslant x'\,|\,z_0^{t+T}\}/\partial x\partial x'$ для значений вектора состояния системы (1) в момент оценивания t и в момент окончания измерений $t+T$.

Введем обозначения:

$$\psi_\mu^{(s_1 s_2\ldots s_l)}=\frac{\partial^l\psi(\mu,\ \nu)}{\partial(i\mu_{s_1})\ldots\partial(i\mu_{s_l})};\qquad \psi_\nu^{(r_1\ldots r_p)}=\frac{\partial^p\psi(\mu,\ \nu)}{\partial(i\nu_{r_1})\ldots\partial(i\nu_{r_p})}; \tag{3}$$

$$\psi_{\nu\mu}^{(r_1\ldots r_p s_1\ldots s_l)}=\frac{\partial^{p+l}\psi(\mu,\ \nu)}{\partial(i\nu_{r_1})\ldots\partial(i\nu_{r_p})\partial(i\mu_{s_l})\ldots\partial(i\mu_{s_l})},\ 1\leqslant s_k,\ r_q\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant 1,\ 1\leqslant q\leqslant p,$$

где $\psi(\nu, \mu)=\ln\{\varphi(\nu, \mu)\}$ и является семиинвариантной функцией, а

$$\varphi(\nu, \mu) = \int\int \exp\{i(\mu^T x + \nu^T x')\} p_t^{t+T}(x, x')\, dx dx'$$

— характеристической функцией распределения $p_t^{t+T}(x, x')$, i — мнимая единица. Тогда семиинварианты $\chi_l^\mu = \left[\chi^\mu_{s_1\ldots s_l}\right]$, $\chi_p^\nu = \left[\chi^\nu_{r_1\ldots r_p}\right]$, $\chi^{\nu\mu}_{p+l} = \left[\chi^{\nu\mu}_{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_l}\right]$ определяются формулами

$$\chi_l^\mu = \psi_\mu^{(s_1\ldots s_l)}(0, 0);\qquad \chi_p^\nu = \psi_\nu^{(r_1\ldots r_p)}(0, 0);\ \chi^{\nu\mu}_{p+l} = \psi_{\nu\mu}^{(r_1\ldots r_p s_1\ldots s_l)}(0, 0). \tag{4}$$

Таким образом, задача определения $m(t, t+T)$ свелась к задаче получения уравнений для семиинвариантов (4). При этом $m(t, t+T) = \chi_1^\mu$, $\Gamma_{22}(t, t+T) = \chi_2^\mu$, а $\mathrm{tr}\{M[\Gamma_{22}(t, t+T)]\}$ определяет точность оценки $m(t, t+T)$ ($\mathrm{tr}\{A\}$ — след матрицы A).

Основные результаты. Введем операторы ($\varphi(x, \cdot)$ — некоторая скалярная функция)

$$L[\varphi(x, \cdot)] = -\sum_{\alpha=1}^{n} \partial[f_\alpha\varphi]/\partial x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial^2[Q_{\alpha\beta}\varphi]/\partial x_\alpha\partial x_\beta; \tag{5}$$

$$L^*[\varphi(x, \cdot)] = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha[\partial\varphi/\partial x_\alpha] + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} Q_{\alpha\beta}[\partial^2\varphi/\partial x_\alpha\partial x_\beta], \tag{6}$$

где $Q = \Phi_1\Phi_1^{\mathrm{T}}$, т — знак транспонирования.

Утверждение 1. Плотность $p_t^{t+T}(x, x')$ удовлетворяет уравнению

$$d_t p_t^{t+T}(x, x') = \left\{L_{x'}\left[p_t^{t+T}(x, x')\right] + \frac{p_t^{t+T}(x, x')}{p_t(x)} L_x[p_t(x)] - \right.$$
$$\left. - p_t(x) L_x^*\left[\frac{p_t^{t+T}(x, x')}{p_t(x)}\right]\right\} dt + p_t^{t+T}(x, x')[dz(t+T) -$$
$$-\overline{h(t+T)}\,dt]^T R^{-1}(t+T)[h(x', t+T) - \overline{h(t+T)}],\ R = \Phi_2\Phi_2^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

где $p_t(x)$ — решение уравнения фильтрации для плотности $p_\xi(x)$ (см., например, [3]) в точке $\xi=t$, $\overline{h(t+T)} = \int h(x', \xi)\, p_\xi(x')\, dx'$ при $\xi=t+T$, а значки у операторов L и L^* обозначают переменные, по которым действуют эти операторы в соответствии с формулами (5), (6). Начальное условие для уравнения (7):

$$p_{t_0}^{t_0+T}(x, x') = p_\tau^\xi(x, x')\Big|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=t_0+T}}\qquad (t_0\leqslant\tau\leqslant\xi),$$

где $p_\tau^\xi(x, x') = \partial^2 P\{x(\tau)\leqslant x, x(\xi)\leqslant x' | z_\tau^\xi\}/\partial x\partial x'$ и удовлетворяет уравнению

$$d_\xi p_\tau^\xi(x, x') = L_{x'}\left[p_\tau^\xi(x, x')\right]d\xi + p_\tau^\xi(x, x')[dz(\xi) -$$
$$-\overline{h(\xi)}\,d\xi]^T R^{-1}(\xi)[h(x', \xi) - \overline{h(\xi)}] \tag{8}$$

с начальным условием $p_\tau^\xi(x, x')|_{\xi=\tau} = p_\tau(x)$.

Доказательство. Аналогично работе [7] можно показать, что плотность $p_\tau^\xi(x, x')$ удовлетворяет по τ уравнению того же типа, что и плотность $p_\tau^\xi(x) = \partial P\{x(\tau)\leqslant x | z_0^\xi\}/\partial x$:

$$d_\tau p_\tau^\xi(x, x') = \left\{\frac{p_\tau^\xi(x, x')}{p_\tau(x)} L_x[p_\tau(x)] - p_\tau(x) L_x^*\left[\frac{p_\tau^\xi(x, x')}{p_\tau(x)}\right]\right\} d\tau. \tag{9}$$

Тогда, перейдя к дискретному времени с интервалами дискретизации $\Delta\xi$ и $\Delta\tau$ по переменным ξ и τ соответственно, получаем из уравнений (8) и (9) следующие формулы:

$$p_\tau^{\xi+\Delta\xi}(x, x') - p_\tau^\xi(x, x') = L_{x'}[p_\tau^\xi(x, x')]\Delta\xi + p_\tau^\xi(x, x')[\Delta z(\xi) - \overline{h(\xi)}\Delta\xi]^T R^{-1}(\xi)[h(x', \xi) - \overline{h(\xi)}] + 0(\Delta\xi); \quad (10)$$

$$p_{\tau+\Delta\tau}^\xi(x, x') - p_\tau^\xi(x, x') = \left\{\frac{p_\tau^\xi(x, x')}{p_\tau(x)} L_x[p_\tau(x)] - p_\tau(x) L_x^*\left[\frac{p_\tau^\xi(x, x')}{p_\tau(x)}\right]\right\}\Delta\tau + 0(\Delta\tau). \quad (11)$$

Пусть для плотности $p_t^{t+T}(x, x')$ интервал дискретизации по переменной t равен Δt. Тогда

$$p_{t+\Delta t}^{t+T+\Delta t}(x, x') - p_t^{t+T}(x, x') = [p_{t+\Delta t}^{t+T+\Delta t}(x, x') - p_t^{t+T+\Delta t}(x, x')] + [p_t^{t+T+\Delta t}(x, x') - p_t^{t+T}(x, x')]. \quad (12)$$

Первая разность в правой части (12) определяется формулой (11) с заменой τ на t, $\Delta\tau$ на Δt и ξ на $t+T+\Delta t$, а вторая разность определяется формулой (10) с заменой τ на t, ξ на $t+T$ и $\Delta\xi$ на Δt. Таким образом, в пределе при $\Delta t \to 0$ уравнение (7) следует из соотношения (12). Начальные условия для уравнений (7), (8) следуют из определения $p_t^{t+T}(x, x')$ и $p_\tau^\xi(x, x')$, а вывод уравнения (8) приводится в работах [14, 15]. Перейдем к выводу уравнений для семиинвариантов (4), ограничившись гауссовой аппроксимацией распределения $p_t^{t+T}(x,x')$. В этом случае нам нужно получить уравнения для $\chi_1^\mu = [\chi_{s_1}^\mu]$, $\chi_2^\mu = [\chi_{s_1 s_2}^\mu]$ и $\chi_2^{\nu\mu} = [\chi_{r_1 s_1}^{\nu\mu}]$, так как $\chi_1^\nu = \tilde{\chi}_1(t+T)$ и $\chi_2^\nu = \tilde{\chi}_2(t+T)$, где $\tilde{\chi}_1$ и $\tilde{\chi}_2$ — значения первого и второго семиинвариантов распределения $p_\xi(x)$ в точке $\xi = t+T$. Уравнения для $\tilde{\chi}_1$ и $\tilde{\chi}_2$ содержатся в [12]. Во всех формулах в дальнейшем оставляются лишь существенные переменные.

Утверждение 2. Семиинварианты $\chi_1^\mu(t, t+T)$, $\chi_2^\mu(t, t+T)$ и $\chi_2^{\nu\mu}(t, t+T)$ удовлетворяют уравнениям

$$d_t\chi_{s_1}^\mu(t, t+T) = \left[\overline{f_{s_1}(t)} - \sum_k \left(\overline{\frac{\partial Q_{s_1 k}(t)}{\partial x_k}} + \overline{Q_{s_1 k}(t)\frac{\partial(\ln p_t)}{\partial x_k}}\right)\right]dt + \overline{y_{s_1}^\mu h(t+T)}^T R^{-1}(t+T)[dz(t+T) - \overline{h(t+T)}dt]; \quad (13)$$

$$d_t\chi_{s_1 s_2}^\mu(t, t+T) = \left[\overline{f_{s_1}(t) y_{s_2}^\mu} + \overline{f_{s_2}(t) y_{s_1}^\mu} - \overline{Q_{s_1 s_2}(t)} - \sum_k\left(\overline{\frac{\partial Q_{s_1 k}(t)}{\partial x_k} y_{s_2}^\mu} + \overline{\frac{\partial Q_{s_2 k}(t)}{\partial x_k} y_{s_1}^\mu}\right) - \sum_k\left(\overline{Q_{s_1 k}(t)\frac{\partial(\ln p_t)}{\partial x_k} y_{s_2}^\mu} + \overline{Q_{s_2 k}(t)\frac{\partial(\ln p_t)}{\partial x_k} y_{s_1}^\mu}\right)\right]dt - \overline{y_{s_1}^\mu h(t+T)}^T R^{-1}(t+T)\overline{h(t+T) y_{s_2}^\mu}dt + \overline{y_{s_1 s_2}^\mu h(t+T)}^T R^{-1}(t+T)[dz(t+T) - \overline{h(t+T)}dt]; \quad (14)$$

$$d_t\chi_{r_1 s_1}^{\nu\mu}(t, t+T) = \left[\overline{f_{s_1}(t) y_{r_1}^\nu} - \sum_k\left(\overline{\frac{\partial Q_{s_1 k}(t)}{\partial x_k} y_{r_1}^\nu} + \overline{Q_{s_1 k}(t)\frac{\partial(\ln p_t)}{\partial x_k} y_{r_1}^\nu}\right)\right]dt + \overline{f_{r_1}(t+T) y_{s_1}^\mu}dt -$$

$$-\overline{y^{\nu}_{r_1}h(t+T)}^T R^{-1}(t+T)\overline{h(t+T)y^{\mu}_{s_1}}dt+\overline{y^{\nu\mu}_{r_1s_1}h(t+T)}^T R^{-1}(t+T)[dz(t+T)-\overline{h(t+T)}dt], \qquad (15)$$

где

$$y^{\mu}_{s_1}=x_{s_1}-\chi^{\mu}_{s_1},\ y^{\nu}_{r_1}=x'_{r_1}-\chi^{\nu}_{r_1},\ y^{\nu\mu}_{r_1s_1}=(x'_{r_1}-\chi^{\nu}_{r_1})(x_{s_1}-\chi^{\mu}_{s_1})-\chi^{\nu\mu}_{r_1s_1},$$

а черта сверху означает усреднение по распределению $p_t^{t+T}(x, x')$. Начальные условия для уравнений (13)—(15) имеют вид

$$\chi^{\mu}_1(t_0, t_0+T)=\chi^{\mu}_1(\tau,\xi)\Big|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=t_0+T}},\quad \chi^{\mu}_2(t_0, t_0+T)=\chi^{\mu}_2(\tau,\xi)\Big|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=t_0+T}},\quad \chi^{\nu\mu}_2(t_0, t_0+T)=\chi^{\nu\mu}_2(\tau,\xi)\Big|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=t_0+T}},$$

где $\chi^{\mu}_1(\tau,\xi)$, $\chi^{\mu}_2(\tau,\xi)$ и $\chi^{\nu\mu}_2(\tau,\xi)$ удовлетворяют уравнениям

$$d_{\xi}\chi^{\mu}_{s_1}(\tau,\xi)=\overline{y^{\mu}_{s_1}h(\xi)}^T R^{-1}(\xi)[dz(\xi)-\overline{h(\xi)}d\xi]; \qquad (16)$$

$$d_{\xi}\chi^{\mu}_{s_1s_2}(\tau,\xi)=-\overline{y^{\mu}_{s_1}h(\xi)}^T R^{-1}(\xi)\overline{h(\xi)y^{\mu}_{s_2}}d\xi+\overline{y^{\mu}_{s_1s_2}h(\xi)}^T R^{-1}(\xi)[dz(\xi)-\overline{h(\xi)}d\xi]; \qquad (17)$$

$$d_{\xi}\chi^{\nu\mu}_{r_1s_1}(\tau,\xi)=\overline{f_{r_1}(\xi)y^{\mu}_{s_1}}d\xi-\overline{y^{\nu}_{r_1}h(\xi)}^T R^{-1}(\xi)\overline{h(\xi)y^{\mu}_{s_1}}d\xi+\overline{y^{\nu\mu}_{r_1s_1}h(\xi)}^T R^{-1}(\xi)[dz(\xi)-\overline{h(\xi)}d\xi] \qquad (18)$$

с начальными условиями

$$\chi^{\mu}_1(\tau)=\widetilde{\chi}_1(\xi)|_{\xi=\tau},\quad \chi^{\mu}_2(\tau)=\chi^{\mu\nu}_2(\tau)=\widetilde{\chi}_2(\xi)|_{\xi=\tau}.$$

Доказательство. Взяв преобразование Фурье от уравнения (7), получаем, что характеристическая функция $\varphi(\nu, \mu)$ распределения $p_t^{t+T}(x, x')$ определяется уравнением

$$d_t\varphi(\mu,\nu)=\Big[(i\mu)^T\widetilde{f}(t)-\frac{1}{2}(i\mu)^T\widetilde{Q}(t)(i\mu)-\sum_k\sum_l(i\mu_k)\,\partial\widetilde{Q}_{kl}(t)-\sum_k\sum_l(i\mu_k)\,\widetilde{\widetilde{Q}}_{kl}(t)+(i\nu)^T\widetilde{f}(t+T)+\frac{1}{2}(i\nu)^T\widetilde{Q}(t+T)(i\nu)\Big]dt+$$
$$+[\widetilde{h}(t+T)-\varphi(\nu,\mu)\overline{h(t+T)}]^T R^{-1}(t+T)[dz(t+T)-\overline{h(t+T)}dt], \qquad (19)$$

где

$$\widetilde{Q}=\int\int Q\exp\{i(\mu^Tx+\nu^Tx')\}\,p_t^{t+T}(x,x')\,dxdx';$$

$$\widetilde{f}=\int\int f\exp\{i(\mu^Tx+\nu^Tx')\}\,p_t^{t+T}(x,x')\,dxdx';$$

$$\partial\widetilde{Q}_{kl}=\int\int\frac{\partial Q_{kl}}{\partial x_l}\exp\{i(\mu^Tx+\nu^Tx')\}\,p_t^{t+T}(x,x')\,dxdx';$$

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_{kl}=\int\int Q_{kl}\frac{\partial(\ln p_t(x))}{\partial x_l}\exp\{i(\mu^Tx+\nu^Tx')\}\,p_t^{t+T}(x,x')\,dxdx';$$

$$\widetilde{h}=\int\int h\exp\{i(\mu^Tx+\nu^Tx')\}\,p_t^{t+T}(x,x')\,dxdx'.$$

Вычисления, производимые при этом, опускаются. Заметим только, что существенным образом используется тот факт, что операторы (5) и (6) являются сопряженными, т. е. они удовлетворяют соотношению

$$\int u_1(x,\cdot)L[u_2(x,\cdot)]\,dx=\int u_2(x)L^*[u_1(x,\cdot)]\,dx.$$

Стохастически дифференцируя $\psi(\mu, \nu)=\ln\{\varphi(\mu, \nu)\}$ с использованием уравнения (19), получаем уравнение для семиинвариантной функции

$$d_t\psi(\mu, \nu) = \exp\{-\psi(\mu, \nu)\}\Big[(i\mu)^T\widetilde{f}(t) - \frac{1}{2}(i\mu)^T\widetilde{Q}(t)(i\mu) -$$
$$-\sum_h\sum_l(i\mu_h)\,\partial\widetilde{Q}_{hl}(t) - \sum_h\sum_l(i\mu_h)\,\widetilde{\widetilde{Q}}_{hl}(t) + (i\nu)^T\widetilde{f}(t+T) +$$
$$+\frac{1}{2}(i\nu)^T\widetilde{Q}(t+T)(i\nu)\Big]dt - \frac{1}{2}[\exp\{-\psi(\mu, \nu)\}\widetilde{h}(t+T) -$$
$$-\overline{h(t+T)}]^T R^{-1}(t+T)[\exp\{-\psi(\mu, \nu)\}\widetilde{h}(t+T) - \overline{h(t+T)}]\,dt +$$
$$+[\exp\{-\psi(\mu, \nu)\}\widetilde{h}(t+T) - \overline{h(t+T)}]^T R^{-1}(t+T)[dz(t+T) -$$
$$-\overline{h(t+T)}\,dt]. \tag{20}$$

Применяя к уравнению (20) формулы (3), получаем с учетом (4) уравнения (13)—(15). Уравнения (16)—(18) получаются из (8), если применить метод семиинвариантной функции. Если продолжать процесс применения формул (3) к уравнению (20), то можно получить уравнения для семиинвариантов распределения $p_t^{t+T}(x, x')$ порядка выше второго.

Возможность эффективного использования уравнений (13)—(15) для вычисления оценки $m(t, t+T)$ связана с возможностью вычисления математических ожиданий по распределению $p_t^{t+T}(x, x')$ от выражений, стоящих под чертой. Получим уравнения, определяющие сглаживающий с постоянным запаздыванием фильтр при гауссовой аппроксимации распределения $p_t(x)$ и квадратичной аппроксимации нелинейных функций f и h вдоль траекторий оценок $m(t)$ и $m(t, t+T)$, полагая для простоты, что $\Phi_1(x, t)\equiv\Phi_1(t)$. Итак,

$$p_t(x) = (2\pi|\widetilde{\chi}_2(t)|)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}[x-\widetilde{\chi}_1(t)]^T\widetilde{\chi}_2^{-1}(t)[x-\widetilde{\chi}_1(t)]\Big\}. \tag{21}$$

Пусть $g(x)$ — некоторая n-мерная функция, а B — матрица размером $(n\times n)$. Под $[g_{xx}:B]$ понимается вектор-столбец с компонентами $[g_{xx}:B]_k$, которые определяются формулой $[g_{xx}:B]_k=\mathrm{tr}\{g_{kxx}B\}$, где g_{kxx} — матрица с элементами $\partial^2 g_k(x)/\partial x_\alpha\partial x_\beta$, а $\mathrm{tr}\{A\}$ — след матрицы A. Тогда в принятых обозначениях при квадратичной аппроксимации функций f и h имеем, что

$$f(x, t) = f(\chi_1^\mu(t, t+T)) + f_x^T(\chi_1^\mu(t, t+T))\,y_1^\mu + \frac{1}{2}[f_{xx}(\chi_1^\mu(t, t+$$
$$+T)):y_1^\mu(y_1^\mu)^T];$$
$$f(x', t+T) = f(\widetilde{\chi}_1(t+T)) + f_{x'}^T(\widetilde{\chi}_1(t+T))\,y_1^\nu + \frac{1}{2}[f_{x'x'}(\widetilde{\chi}_1(t+T)):$$
$$:y_1^\nu(y_1^\nu)^T]; \tag{22}$$
$$h(x', t+T) = h(\widetilde{\chi}_1(t+T)) + h_{x'}^T(\widetilde{\chi}_1(t+T))\,y_1^\nu + \frac{1}{2}[h_{x'x'}(\widetilde{\chi}_1(t+$$
$$+T)):y_1^\nu(y_1^\nu)^T],$$

где

$$f_x(\chi_1^\mu) = \partial f(x, t)/\partial x\,|_{x=\chi_1^\mu},\ f_{xx}(\chi_1^\mu) = \partial^2 f(x, t)/\partial x^2\,|_{x=\chi_1^\mu};$$
$$f_{x'}(\widetilde{\chi}_1) = \partial f(x', t+T)/\partial x'\Big|_{x'=\widetilde{\chi}_1},\quad f_{x'x'}(\widetilde{\chi}_1) = \partial^2 f(x', t+T)/\partial(x')^2\Big|_{x'=\widetilde{\chi}_1};$$
$$h_{x'}(\widetilde{\chi}_1) = \partial h(x', t+T)/\partial x'\Big|_{x'=\widetilde{\chi}_1},\quad h_{x'x'}(\widetilde{\chi}_1) = \partial^2 h(x', t+T)/\partial(x')^2\Big|_{x'=\widetilde{\chi}_1}.$$

Производя вычисления математических ожиданий в уравнениях (13)—(18) при сделанных допущениях (21), (22) и используя обозначения

$$m(t, t+T) = \chi_1^{\mu}, \ \ \Gamma_{22}(t, t+T) = \chi_2^{\mu}, \ \ \Gamma_{12}(t, t+T) = \chi_2^{\nu\mu}, \ \ m(t) = \widetilde{\chi}_1(t),$$
$$\Gamma(t) = \widetilde{\chi}_2(t),$$

получаем, что квадратично-гауссову аппроксимацию сглаживающего с постоянным запаздыванием фильтра дает следующее

Утверждение 3. Оценка сглаживания с постоянным запаздыванием $m(t, t+T)$ вектора состояния $x(t)$ системы (1) при гауссовой аппроксимации распределений $p_t^{t+T}(x, x')$ и $p_t(x)$ и квадратичной аппроксимации (22) функций f и h вдоль траекторий оценок $m(t, t+T)$ и $m(t)$, когда шум в объекте не зависит от состояния ($\Phi_1(x, t) \equiv \Phi_1(t)$), определяется уравнениями

$$d_t m(t, t+T) = \Big\{f(m(t, t+T)) + \frac{1}{2}[f_{xx}(m(t, t+T)) : \Gamma_{22}(t, t+T)] + Q(t)\Gamma^{-1}(t)[m(t, t+T) - m(t)]\Big\}dt + \Gamma_{12}^T(t, t+T)\,h_{x'}^T(m(t+T))\,R^{-1}(t+T)\Big\{dz(t+T) - h(m(t+T))\,dt - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(t+T)) : \Gamma(t+T)]\,dt\Big\}; \tag{23}$$

$$d_t\Gamma_{22}(t, t+T) = \{[f_x(m(t, t+T)) + Q(t)\Gamma^{-1}(t)]\,\Gamma_{22}(t, t+T) + \Gamma_{22}(t, t+T)\,[f_x(m(t, t+T)) + Q(t)\Gamma^{-1}(t)]^T - Q(t) - \Gamma_{12}^T(t, t+T)\,h_{x'}^T(m(t+T))\,R^{-1}(t+T)\,h_{x'}(m(t+T))\,\Gamma_{12}(t, t+T)\}\,dt - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(t+T)) : \Gamma(t+T)]^T R^{-1}(t+T)\Big\{dz(t+T) - h(m(t+T))\,dt - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(t+T)) : \Gamma(t+T)]\,dt\Big\}\,\Gamma_{22}(t, t+T); \tag{24}$$

$$d_t\Gamma_{12}(t, t+T) = \{\Gamma_{12}(t, t+T)\,[f_x(m(t, t+T)) + Q(t)\Gamma^{-1}(t)]^T + \big[f_{x'}(m(t+T)) - \Gamma(t+T)\,h_{x'}^T(m(t+T))\,R^{-1}(t+T)\,h_{x'}(m(t+T))\big] \times \Gamma_{12}(t, t+T)\}\,dt - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(t+T)) : \Gamma(t+T)]^T R^{-1}(t+T)\{dz(t+T) - h(m(t+T))\,dt - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(t+T)) : \Gamma(t+T)]\,dt\}\,\Gamma_{12}(t, t+T). \tag{25}$$

Начальные условия для уравнений (23)—(25) имеют вид

$$m(t_0, t_0+T) = m(\tau, \xi)\Big|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=t_0+T}}, \quad \Gamma_{22}(t_0, t_0+T) = \Gamma_{22}(\tau, \xi)\Big|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=t_0+T}},$$
$$\Gamma_{12}(t_0, t_0+T) = \Gamma_{12}(\tau, \xi)\Big|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=t_0+T}},$$

где $m(\tau, \xi)$, $\Gamma_{22}(\tau, \xi)$ и $\Gamma_{12}(\tau, \xi)$ удовлетворяют уравнениям

$$d_\xi m(\tau, \xi) = \Gamma_{12}^T(\tau, \xi)\,h_{x'}^T(m(\xi))\,R^{-1}(\xi)\Big\{dz(\xi) - h(m(\xi))\,d\xi - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m \times (\xi)) : \Gamma(\xi)]\,d\xi\Big\}, \quad m(\tau, \tau) = m(\tau); \tag{26}$$

$$d_\xi \Gamma_{22}(\tau, \xi) = -\Gamma_{12}^T(\tau, \xi)\, h_{x'}^T(m(\xi))\, R^{-1}(\xi)\, h_{x'}(m(\xi))\, \Gamma_{12}(\tau, \xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(\xi)) : \Gamma(\xi)]^T R^{-1}(\xi)\left\{dz(\xi) - h(m(\xi))\, d\xi - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(\xi)) :\right.$$

$$\left. : \Gamma(\xi)]\, d\xi\right\} \Gamma_{22}(\tau, \xi), \quad \Gamma_{22}(\tau, \tau) = \Gamma(\tau); \tag{27}$$

$$d_\xi \Gamma_{12}(\tau, \xi) = \left[f_{x'}(m(\xi)) - \Gamma(\xi)\, h_{x'}^T(m(\xi))\, R^{-1}(\xi)\, h_{x'}(m(\xi))\right] \Gamma_{12}(\tau, \xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(\xi)) : \Gamma(\xi)]^T R^{-1}(\xi)\left\{dz(\xi) - h(m(\xi))d\xi - \frac{1}{2}[h_{x'x'}(m(\xi)) :\right.$$

$$\left. : \Gamma(\xi)]\, d\xi\right\} \Gamma_{12}(\tau, \xi), \quad \Gamma_{12}(\tau, \tau) = \Gamma(\tau). \tag{28}$$

Входящие в уравнения (23)—(28) $m(t)$ и $\Gamma(t)$ являются решениями уравнений фильтрации, которые имеются, например, в [13] (см. формулы (8.3), (8.4)).

Утверждение 3 дает замкнутую систему уравнений для вычисления оценки $m(t, t+T)$. Из уравнения (24) видно, что $\Gamma_{22}(t, t+T)$ зависит от реализации наблюдаемого процесса $z(t)$, поэтому $\sigma^2 = \operatorname{tr}\{\Gamma_{22}(t, t+T)\}$ определяет условную точность оценки $m(t, t+T)$ при фиксированной реализации z_0^{t+T}. Безусловная точность оценки $m(t, t+T)$ определяется значением $\tilde{\sigma}^2 = \operatorname{tr}\{M[\Gamma_{22}(t, t+T)]\}$, которое для каждой конкретной задачи может быть определено численно по методу Монте-Карло путем усреднения по реализациям процесса $z(t)$.

Уравнения (13)—(15) можно использовать для получения других аппроксимаций сглаживающего с постоянным запаздыванием фильтра, нежели аппроксимация (23)—(25). Например, если задана номинальная (невозмущенная) траектория $x^*(t)$ системы (1), то вместо разложений (22) можно использовать разложение функций f и h вдоль номинальной траектории.

В заключение отметим, что при линейных относительно x функциях f и h уравнения (23)—(25) сводятся к уравнениям (7.71)—(7.73), а уравнения (26)—(28) — к уравнениям (7.57)—(7.59) из работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Медич. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М., «Энергия», 1973.
2. Ш.-С. О. Абдулаев, Б. А. Беседин. О синтезе оптимальных фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем.— «Автометрия», 1974, № 2, с. 10—18.
3. Д. Снайдер. Метод уравнений состояния для непрерывной оценки в применении к теории связи. М., «Энергия», 1973.
4. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974.
5. G. M. Lee. Nonlinear interpolation.— "IEEE Trans. on Inf. Theory", 1971, vol. IT-17, № 1, p. 45—49.
6. C. T. Leondes, J. B. Peller, E. B. Stear. Nonlinear smoothing theory.— "IEEE Trans. on Syst. Sci. and Cybern.", 1970, vol. SSC-6, № 1, p. 63—71.
7. B. D. O. Anderson. Fixed interval smoothing for nonlinear continuous time systems.— "Information and Control", 1972, vol. 20, № 3, p. 294—300.
8. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
9. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Стохастические дифференциальные уравнения Киев, «Наукова думка», 1968.
10. К. О. Калвер. Оптимальные оценки состояния нелинейных систем.— «Э-И. САУ», 1970, № 5, с. 1—15.
11. М. Л. Дашевский. Метод семиинвариантов в задачах нелинейной фильтрации марковских процессов.— «Автоматика и телемеханика», 1968, № 7, с. 24—32.
12. T. Nakamizo. On the state estimation for nonlinear dynamic systems.— "International J. of Control", 1970, vol. 11, № 4, p. 683—695.

13. R. S. Bucy, P. D. Joseph. Filtering for stochastic processes with application to guidance. New York, Interscience Publishers, 1968.
14. Н. С. Демин. О прямых уравнениях интерполяции для векторов состояний динамических систем.— Третье Всесоюзное совещание по статистическим методам в процессах управления. (Тезисы докладов). Ч. 1. Вильнюс, Изд. АН Лит.ССР, 1973, с. 65—67.
15. Н. С. Демин. О прямых уравнениях интерполяции для диффузионных процессов.— Труды Сибирского физико-технического института им. В. Д. Кузнецова. Ч. 2. Томск. Изд. Томского университета, вып. 60, с. 21—30.

Поступила в редакцию 4 ноября 1975 г.; окончательный вариант — 4 марта 1976 г.

УДК 519.25 : 621.3.087

Е. Д. КОНСОН

(Ленинград)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ВЫСОКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВАРИАЦИИ

В работах [1—3] рассматривался знаковый метод определения математического ожидания стационарного случайного процесса. Существенная особенность метода — введение вспомогательного случайного процесса в процедуру обработки исследуемого процесса. При построении устройств, основанных на этом принципе, характеристики источника вспомогательного сигнала фактически определяют точностные свойства всего устройства [1], причем источник вспомогательного сигнала является и наиболее сложной в техническом отношении частью устройства [4].

В настоящей работе показано, что при введении дополнительных ограничений на характеристики исследуемого процесса знаковый алгоритм может быть представлен в форме, не требующей использования вспомогательного процесса.

Предлагаемый алгоритм содержит следующие операции. На основе последовательных независимых выборок $x_i (i=1, 2, \ldots)$ анализируемого процесса $x(t)$, математическое ожидание которого δ, дисперсия σ^2 и плотность распределения $\varphi(x)$, определяются значения функции $f_1(x_i)=\operatorname{sgn} x_i$ и $f_2(x_i)=0{,}5[\operatorname{sgn}(x_i+u)-\operatorname{sgn}(x_i-u)]$, где u — задаваемый параметр алгоритма. Полученные значения используются для формирования текущих сумм $\sum\limits_i f_1(x_i)$ и $\sum\limits_i f_2(x_i)$. Очевидно, что в процессе обработки вторая сумма может только возрастать. Когда она становится равной заранее заданному числу k, являющемуся параметром алгоритма, фиксируется значение первой суммы, которое и рассматривается в качестве оценки искомого математического ожидания δ (с точностью до известного множителя). Таким образом, число используемых в оценке выборок случайно. Перейдем к анализу вероятностных характеристик алгоритма и их зависимости от параметров u и k.

Событие, заключающееся в том, что оценка будет содержать N выборок, состоит из событий, когда в результате обработки $N-1$ первых выборок сумма $\sum\limits_{i=1}^{N-1} f_2(x_i)$ принимает значение $k-1$ и N-я выборка x_N попадает в промежуток $[-u, u]$. При независимых выборках распределение $\sum\limits_{i=1}^{N-1} f_2(x_i)$ подчиняется биномиальному закону, и для рас-