ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.
2. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.
3. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.
4. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.
5. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения.— М.: Мир, 1972.
6. **Морозов В. А.** О задаче дифференцирования и некоторых алгоритмах приближения экспериментальной информации.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1970, вып. 14, с. 46—62.
7. **Воскобойников Ю. В.** Критерий и алгоритмы выбора параметра при сглаживании сплайн-функциями.— В кн.: Алгоритмы обработки и средства автоматизации теплофизического эксперимента. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1978, с. 30—45.
8. **Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С.** Использование методов математической статистики для решения некорректных задач.— УФН, 1970, т. 102, вып. 3, с. 345—386.
9. **Преображенский Н. Г., Пикалов В. В.** Неустойчивые задачи диагностики плазмы.— Новосибирск: Наука, 1982.
10. **Туровцева Л. С.** Решение обратных некорректных задач методом статистической регуляризации. (Программа ОБР).— М., 1975. (Препринт/АН СССР, ИПМ, 23).
11. **Баглай Р. Д.** О критерии выбора параметра регуляризации, основанном на вычислении функции чувствительности.— ЖВМиМФ, 1975, т. 15, № 2, с. 305—320.
12. **Воскобойников Ю. Е., Томсонс Я. Я.** Выбор параметра регуляризации и ошибки восстановления входного сигнала в методе статистической регуляризации.— Автометрия, 1975, № 4, с. 10—18.
13. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента.— М.: Наука, 1971.
14. **Пененко В. П.** Методы численного моделирования атмосферных процессов.— Л.: Наука, 1981.
15. **Грачев И. Д., Салахов М. Х., Фишман И. С.** Обработка двумерных экспериментальных данных методом статистической регуляризации.— Опт. и спектр., 1983, т. 54, вып. 5, с. 923—925.
16. **Иохвидов И. С.** Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы.— М.: Мир, 1974.
17. **Таммет Х. Ф.** Введение в линейную конечномерную теорию спектрометрии.— Таллин: Валгус, 1975.
18. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.
19. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 14 июня 1983 г.

УДК 548.734

В. В. ИЛЮХИН, Б. С. КОГАН, Э. А. КУЗЬМИН, Е. А. СОЛДАТОВ, В. Р. ФИДЕЛЬМАН

(Севастополь)

О РАЗДЕЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

1. Сложные функции (сигналы), представляющие сумму отдельных базовых составляющих одинаковой формы, разнесенные друг относительно друга на некоторые (не обязательно кратные) сдвиги, имеют место в самых различных отраслях науки и техники [1—4].

Необходимость разработки количественного метода по разложению общего сигнала на отдельные составляющие возникает в случае считывания информации при обработке изображений в радио- и гидролокации, океанографии, радиоастрономии, биомедицине, оптике, пеленгации и других областях. Во многих приложениях важное значение имеет разделение функции на сумму экспонент [5, 6] и особенно (в случае, если все показатели экспонент чисто мнимые величины) разделение функций на гармонические составляющие [7—12]. Такая задача может быть сведена к определению коэффициентов разложения некоторых сложных функций на синусоидальные составляющие с некратными частотами. Методами классического гармонического анализа эта задача не может быть решена достаточно удовлетворительно без потери информации.

2. Рассмотрим простой случай, когда функция (например, экспериментально измеренная) состоит из подобных друг другу аддитивных составляющих. Тогда ее разделение на составляющие может быть сведено к разделению некоторой другой функции на экспоненты с мнимыми показателями. Другими словами, необходимо определить параметры экспонент или, что то же самое, частоты гармонических составляющих, а также веса этих экспонент.

Пусть функция $f(x)$ в общем виде представляется суммой подобных функций, сдвинутых относительно друг друга на x_k:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} A_k g(x - x_k). \tag{1}$$

Задача разделения состоит в определении x и A_k при известных функциях f и g. Обозначим через Φ и G фурье-образы функций f и g соответственно. С учетом теоремы сдвига переходим от (1) к уравнению

$$\Phi(t) = G(t) \sum_{k=1}^{N} A_k \exp 2\pi i x_k t. \tag{2}$$

Пусть Φ и G заданы при $t = 1, 2, \ldots, T$ и при этих значениях $G \neq 0$. Тогда, введя обозначение $F = \Phi/G$ в уравнение (2), получим

$$F(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \exp 2\pi i x_k t, \tag{3}$$

где x_k — параметры экспонент, A_k — веса экспонент, которые необходимо определить.

Таким образом, задача разделения функции f на подобные составляющие сводится к задаче разделения некоторой другой функции на экспоненты.

3. Из существующих способов разделения сложных сигналов, содержащих синусоидальные составляющие с некратными частотами, наиболее полно отражающим спектральный состав сигнала, видимо, следует считать метод гармонического разложения Писаренко (ГРП) [10, 11] (изложение этого метода на русском языке приводится в обзорной работе [9]). Однако предложенный в [9—11] подход имеет ряд недостатков. Во-первых, в методе ГРП необходимо точно знать количество экспонент, составляющих функцию. Во-вторых, метод ГРП требует, чтобы экспоненты, входящие в структуру сложной функции, были комплексно-сопряженными парами, т. е. функция должна представлять собой сумму косинусоид, что в общем случае не выполняется. В-третьих (и это самое важное), такой подход не распространяется на дву-, трех- и вообще N-мерный случай разложения.

Предлагаемый метод разделения сложных функций свободен от указанных недостатков.

4. Определение показателей степеней экспонент, входящих в функцию F, может быть сведено к определению корней некоторого многочлена, коэффициенты C_k которого представляют собой решение системы линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{N} C_k F(k + j) = 0. \tag{4}$$

Здесь N — число экспонент, входящих в структуру функции, которое предполагается известным (в дальнейшем для простоты обозначений будем считать, что функция F задана или измерена при целочисленных значениях аргумента). Если же N неизвестно и должно быть определено, то это обстоятельство является существенным затруднением в применении такого подхода [7]. В идеальном случае, когда измеренные значения функции F не содержат помех, N может быть найдено из ранга определителя

$$\Delta = |F(k+j)|, \quad k,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{5}$$

Последовательно наращивая r и вычисляя этот определитель, можно заметить, что он становится равным нулю при $r = N+1$, и, таким образом, существует возможность предварительного вычисления N. Однако этот алгоритм очень чувствителен к помехам в измеренных значениях функции F, и поэтому важно исключить из процедуры разделения функций на экспоненты предварительное определение числа экспонент, составляющих функцию.

Следующие три теоремы, с одной стороны, доказывают возможность разделения произвольной функции на экспоненты без предварительного знания их числа, с другой — одновременно указывают алгоритм такого разделения.

Теорема 1. Пусть функция $F(j)$ представлена в виде

$$F(j) = \sum_{k=1}^{N} A_k \exp j\, x_k, \quad \exp j\, x_l \neq \exp j x_r \ \text{при} \ l \neq r. \tag{6}$$

Тогда для любого $M > N$ можно найти такие одновременно неравные нулю $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_k$, что будет иметь место соотношение

$$\sum_{k=0}^{M} C_k F(k+j) = 0 \tag{7}$$

при любых j.

Для доказательства рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{M} C_k\, \beta_h^k = 0, \tag{8}$$

где $\beta_h = \exp j x_h$, $h = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. При $\beta_l \neq \beta_r$ $(l \neq r)$ система (8) всегда имеет нетривиальные решения. Умножая (8) на $A_h \beta_h^j$ и суммируя по h, приходим к (7), что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть в системе уравнений (7) $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_1$, где $N_1 \geqslant N$. Тогда множество многочленов

$$\pi(\rho) = \sum_{k=0}^{M} C_k \rho^k \tag{9}$$

(C_k определяется уравнением (7)) имеет N общих корней $\rho_l = \beta_l$, $l = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Другими словами, если для C_k выполняется условие (7), то общие корни удовлетворяют и условию (8) (положение, обратное теореме 1).

Доказательство. Подставляя (6) в (7), приходим к

$$\sum_{k=0}^{M} C_k \sum_{h=1}^{N} A_h \beta_h^{k+j} = 0. \tag{10}$$

Переставляя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{h=1}^{N} A_h \beta_h^j \sum_{k=0}^{M} C_k \beta_h^k = 0. \tag{11}$$

Введем обозначение $R_h = \sum_{k=0}^{M} C_k \beta_h^k$ и перепишем (11) в виде

$$\sum_{h=1}^{N} A_h \beta_h^j R_h = 0. \tag{12}$$

Покажем, что система (12) относительно R_h имеет только тривиальное решение, и тем самым докажем теорему 2. Матрица системы (12) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} A_1\beta_1 & A_2\beta_2 & \dots & A_N\beta_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_N\beta_1^{N} & \dots & & A_N\beta_N^{N} \end{pmatrix}. \qquad \sum_{r=1}^{N} \ldots \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^{N-1}\beta_2^{N-2} & \dots & \beta_N^{N-1} \end{vmatrix} \tag{13}$$

Так как $A_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$ и $\beta_j \neq \beta_k$ при $j \neq k$, то определитель Вандермонда в выражении (14) не равен нулю и, следовательно, $\Delta \neq 0$, откуда следует единственность тривиального решения. Таким образом, показатели экспонент могут быть найдены из корней многочлена $\pi(\rho)$, коэффициенты которого являются решением системы линейных уравнений (4). Рассмотрим теперь алгоритм вычисления весовых множителей этих экспонент и покажем, что они определяются однозначно.

Разделим корни полинома $\pi(\rho)$ на две группы:

1) N корней $\beta_k = \exp jx_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, связанных с показателями экспонент, входящих в структуру функции $F(j)$;

2) $N' \leqslant M - N$ произвольных корней (различающихся между собой и отличных от первых).

Запишем функцию $F(j)$ следующим образом:

$$F(j) = \sum_{l=1}^{N+N'} B_l B_l^j, \quad j = 1, 2, \ldots, N + N'. \tag{15}$$

Из представления (3) функции $F(j)$ следует, что если (15) рассматривать как систему уравнений относительно B_l, то существует решение системы:

$$\left.\begin{aligned} B_l &= A_l \text{ при } l \leqslant N, \\ B_l &= 0 \text{ при } l > N. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Теорема 3. Система уравнений для весовых коэффициентов (15) имеет единственное решение (16).

Доказательство. Рассмотрим (15) как систему уравнений относительно B_l. Нетрудно показать, что определитель Δ первых $N+N'$ уравнений этой системы записывается в виде

$$\Delta = \left|\beta_j^k\right|, \quad j, k = 1, 2, \ldots, N + N'. \tag{17}$$

Поскольку $\beta_j \neq \beta_k$ при $j \neq k$, то $\Delta \neq 0$, так что система имеет единственное решение (16), следовательно, весовые множители определяются однозначно.

Таким образом, разделение функции на экспоненты сводится к нахождению коэффициентов многочлена (9) из системы уравнений (4), определению корней β_k этого многочлена, связанных с показателями экспонент x_k простым соотношением $\beta_k = \exp jx_k$, и последующему вычислению весовых множителей этих экспонент на основе системы линейных уравнений (15). Альтернативой определению корней полинома (9) может быть отыскание максимумов функции

$$p(x) = 1/(\alpha + |\pi(\exp jx)|) \tag{9'}$$

($\exp jx = \rho$), которые достигаются при значениях x, равных x_k.

5. Изложенное выше относится к тому случаю, когда функция представляет собой «идеальную» сумму экспонент и не искажена помехами.

В присутствии помех центральной задачей является корректное определение коэффициентов C_k. Алгоритм вычисления C_k должен быть таким, чтобы в случае случайных некоррелированных помех в измеряемых значениях функции ошибка в C_k была тем меньше, чем больше количество экспериментальных данных, и стремилась бы к нулю при увеличении этого объема до бесконечности. Другими словами, алгоритм должен давать состоятельную оценку C_k.

Как будет показано ниже, определение C_k сводится к решению некоторой задачи по нахождению собственных значений. При этом (как подтвердил ряд применений излагаемого в работе метода) алгоритм разделения функции на экспоненты с мнимыми показателями (или, что то же самое, на гармонические составляющие) оказывается весьма помехоустойчивым.

Итак, при неизвестном N можно вместо N брать априорную верхнюю границу числа экспонент. Поэтому здесь и далее под N будем подразумевать верхнюю границу.

Введем искаженную функцию F' в виде суммы идеальной функции F и случайной некоррелированной добавки (с нулевым средним и дисперсией σ^2), т. е.

$$F'(j) = F(j) + U(j). \tag{18}$$

Система уравнений для коэффициентов линейной регрессии в этом случае имеет вид

$$\sum_{k=0}^{N} C'_k F'(k+j) = \varepsilon_j. \tag{19}$$

Для решения этой системы перейдем к нормальным уравнениям Гаусса, т. е. будем искать минимум функции

$$\Phi\left(C'_0, C'_1, \ldots, C'_N\right) = \sum_{j=1}^{L} \left| \sum_{k=0}^{N} C'_k F'(k+j) \right|^2 = \min. \tag{20}$$

Чтобы исключить тривиальное решение, наложим условие

$$\sum_{k=0}^{N} |C'_k|^2 = 1. \tag{21}$$

Рассмотрим матрицы нормальных уравнений R_{rs} и R'_{rs} соответственно для систем (7) и (19):

$$R_{rs} = \sum_{k=1}^{L} F(k+r)\, F^*(k+s), \tag{22}$$

$$R'_{rs} = \sum_{k=1}^{L} F'(k+r)\, F'^*(k+s); \quad r, s = 0, 1, \ldots, N. \tag{22'}$$

Последовательность значений функций $F(j)$ и $F'(j)$ будем считать временными рядами, соответствующими реализациям некоторых процессов; матрицы R_{rs} и R'_{rs} представляют собой (с точностью до константы $1/L$) оценки автоковариаций временных рядов $F(j)$ и $F'(j)$, т. е.

$$R_{rs} = \langle F(k+r) F^*(k+s) \rangle_k, \tag{23}$$

$$R'_{rs} = \langle F'(k+r) F'^*(k+s) \rangle_k. \tag{23'}$$

Выясним соотношение этих оценок в случае предельного перехода при $L \to \infty$; обозначим символом $p\lim$ предел в смысле сходимости по вероятности. Из (23) с учетом (19) следует

$$R'_{rs} = \langle F'(k+r)\, F'^*(k+s) \rangle_k = \langle (F(k+r) + U(k+r))\, (F^*(k+s) + U^*(k+s)) \rangle_k = \langle F(k+r)\, F^*(k+s) \rangle_k + \langle U(k+r)\, U^*(k+s) \rangle_k + \langle F(k+r)\, U^*(k+s) \rangle_k + \langle F^*(k+s)\, U(k+r) \rangle_k. \tag{24}$$

Первый член в (24) — это R_{rs}, второй при предельном переходе $L \to \infty$ представляет собой

$$\langle U_{k+r} U^*_{k+s} \rangle_k = \delta_{rs} \sigma^2, \tag{25}$$

где δ_{rs} — символ Кронекера. Два последних члена однотипны и сходятся к нулю. Действительно,

$$\langle U^*(k+s) F(k+r) \rangle_k = \left\langle \sum_{j=1}^{N} U^*(k+s) A_j \exp x_j (k+s) \right\rangle_k \tag{26}$$

или (после замены $k+s=l$, $s-r=m$)

$$\langle U^*(k+s) F(k+r) \rangle_k = \left\langle \sum_{j=1}^{N} U^*(l) A_j (\exp x_j m) (\exp x_j l) \right\rangle_l =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} A_j (\exp x_j m) \langle U^*(l) \exp x_j l \rangle_l. \tag{27}$$

Поскольку величины типа

$$B_1 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} U_l \cos \nu l, \quad B_2 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} U_l \sin \nu l \tag{28}$$

сходятся по вероятности к нулю (Уолкер, 1965, см. [13]), то величина (27) и оба последних члена в равенстве (24) равны нулю в смысле сходимости по вероятности при $L \to \infty$. Тогда из (24) с учетом (25) получаем искомое предельное соотношение между матрицами R'_{rs} и R_{rs} зашумленной и идеальной исходных функций:

$$R'_{rs} = R_{rs} + \delta_{rs} \sigma^2. \tag{29}$$

Умножая (29) на вектор с компонентами C_s, удовлетворяющими системе (4), приходим к

$$R'_{rs} C_s = R_{rs} C_s + \sigma^2 \delta_{rs} C_s. \tag{30}$$

Поскольку коэффициенты C_s удовлетворяют уравнению (4), а значит, и системе нормальных уравнений $R_{rs} C_s = 0$, то (30) переходит в уравнение

$$R'_{rs} C_s = \sigma^2 C_s \delta_{rs}. \tag{31}$$

Отсюда следует, что C_s — собственный вектор матрицы R'_{rs}, соответствующий собственному значению, равному дисперсии шума. Это означает, что решение задачи о собственных векторах и значениях матрицы R'_{rs} дает несмещенные оценки коэффициентов C_k и дисперсии шума σ^2.

Поскольку матрица R'_{rs} эрмитова, задача нахождения собственных векторов и соответствующих собственных значений, как известно, эквивалентна задаче определения стационарных точек эрмитовой формы

$$\Phi(C_0, C_1, \ldots, C_N) = \sum_{r,s=0}^{N} R'_{rs} C_r C^*_s \tag{20'}$$

при условии (21), причем минимум реализуется на собственном векторе, отвечающем минимальному собственному значению. Таким образом, определив минимальное собственное значение матрицы и соответствующий ему собственный вектор, можно найти оценки коэффициентов многочлена C_k (9), а также дисперсии шума.

Следует отметить, что сведение задачи определения коэффициентов C_k к определению собственных значений и собственных векторов матрицы R'_{rs} имеет принципиальное значение. Дело в том, что традиционные подходы к определению C_k фактически сводятся к тому, что C_0 (или C_N) полагается равным 1, после чего система (4) становится неоднородной относительно прочих неизвестных C_k. В присутствии шума в измеряемых значениях функции такая операция вводит систематическую ошибку в последующее решение этой системы, в результате чего оценка C_k оказывается несостоятельной, а разделение функции на экспоненты в присутствии значительных помех становится затруднительным. Изложенный выше способ не только свободен от этого недостатка, но и отличается повышенной помехоустойчивостью.

6. Рассмотрим двумерное обобщение изложенного метода. Пусть двумерная функция $F(j_1, j_2)$ имеет вид

$$F(j_1, j_2) = \sum_{k=1}^{N} A_k \exp(x_{1,k} j_1 + x_{2,k} j_2). \qquad (32)$$

Аналоги уравнений (4) примут вид

$$\sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} C_{h_1,h_2} F(h_{1+j_1}, h_{2+j_2}) = 0. \qquad (33)$$

В одномерном случае условие, при котором были справедливы уравнения вида (33), заключалось в том, что верхняя граница суммирования должна быть больше количества экспонент, входящих в функцию. Можно показать, что в двумерном случае аналог этого условия описывается неравенством $(N_1+1)(N_2+1) > N$. Двумерная индексация в уравнениях (33) допускает преобразование в одномерную, и, приведя эту систему линейных уравнений к обычному виду, можно перейти к системе нормальных уравнений. Определив далее собственный вектор нормальной матрицы, отвечающий минимальному собственному значению, находим C_{h_1,h_2}. Затем, изменив числа N_1, N_2 (помня об условии $(N_1+1)(N_2+1) > N$), повторяем процедуру определения C_{h_1,h_2} и получаем в результате два набора C-коэффициентов; таким образом, приходим к системе двух многочленов типа

$$\left.\begin{aligned} \pi(\rho_1, \rho_2) &= \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} C_{h_1,h_2} \rho_1^{h_1} \rho_2^{h_2} = 0, \\ \pi'(\rho_1, \rho_2) &= \sum_{h_1=0}^{N_1'} \sum_{h_2=0}^{N_2'} C_{h_1,h_2} \rho_1^{h_1} \rho_2^{h_2} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

где $\rho_1 = \exp x_1$, $\rho_2 = \exp x_2$. После определения $x_{1,k}$, $x_{2,k}$ исходя из системы (34) равенство (32) может рассматриваться как система линейных уравнений относительно «мощностей» экспонент A_k, решить которую не представляет труда.

Аналогично одномерному случаю определение частот может быть сведено к определению максимумов функции

$$p(x_1, x_2) = 1/[\alpha + |\pi(\exp x_1, \exp x_2)| + |\pi'(\exp x_1, \exp x_2)|]. \qquad (35)$$

Переход к большому числу измерений приводит лишь к добавлению новых индексов и знаков суммирования и не содержит никаких принципиально новых элементов по сравнению с двумерным случаем [14, 15].

7. Следует отметить, что до появления в 1978 г. работ [14, 15] ни в СССР, ни за рубежом не встречалось публикаций, в которых бы обсуждались эффективные методы разделения многомерных функций на сумму экспонент. В 1980—1982 гг. опубликованы работы американских авторов [16, 17], в которых предлагается метод пространственно-временного оценивания двумерных сигналов, основанный на уравнениях, сходных с уравнениями (33)—(35) данной работы. Однако описанные в [16, 17] алгоритмы носят весьма частный характер по сравнению с подходом, изложенным для многомерного случая в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ван-Трис Г.** Теория обнаружения оценок и модуляции: Пер. с англ. под ред. В. И. Тихонова.— М.: Сов. радио, 1972, т. 1.
2. **Ширман Я. Д., Манжос В. Н.** Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех.— М.: Радио и связь, 1981.
3. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
4. **Бюргер М.** Структура кристаллов и векторное пространство.— М.: ИЛ, 1961.
5. **Хэмминг Р.** Численные методы.— М.: Наука, 1968.
6. **Кон-Сфетку С., Смит М., Никольс С., Генри Д.** Цифровой метод анализа одного класса многокомпонентных сигналов.— ТИИЭР, 1975, т. 63, № 10, с. 104—113.
7. **Серебрянников М. Г., Первозванский А. А.** Выявление скрытых периодичностей.— М.: Наука, 1965.
8. **Солдатов Е. А., Илюхин В. В., Кузьмин Э. А., Белов Н. В.** Новый алгебраический подход к разделению одномерной функции на сумму экспонент.— ДАН СССР, 1979, т. 248, № 5, с. 1116—1119.
9. **Солдатов Е. А., Илюхин В. В., Кузьмин Э. А., Белов Н. В.** К определению коэффициентов характеристического уровня в задаче разделения искаженной шумами функции на сумму экспонент.— ДАН СССР, 1979, т. 248, № 6, с. 1341—1343.
10. **Pisarenko V. F.** The retrieval of harmonics from a covariance function.— Geophys. J. Royal Astronom. Soc., 1973, vol. 33, p. 347—366.
11. **Pisarenko V. F.** On the estimation of spectra by means of nonlinear of the covariance matrix.— Geophys. J. Royal Astronom. Soc., 1972, vol. 28, p. 511—531.
12. **Кей С. М., Марпл С. Л.** Современные методы спектрального анализа.— ТИИЭР, 1981, т. 69, № 11, с. 5—52.
13. **Кендалл М. Д., Стьюарт А.** Многомерный статистический анализ и временные ряды.— М.: Наука, 1976.
14. **Солдатов Е. А., Илюхин В. В., Кузьмин Э. А., Белов Н. В.** Разложение произвольного трехмерного контура на составляющие.— ДАН СССР, 1978, т. 241, № 4, с. 832—833.
15. **Солдатов Е. А., Илюхин В. В., Кузьмин Э. А., Белов Н. В.** Разделение многомерного контура на составляющие.— ДАН СССР, 1978, т. 242, № 1, с. 97—98.
16. **Кумаресан Р., Тафтс Д. У.** Метод пространственно-временного оценивания двумерных сигналов.— ТИИЭР, 1981, т. 69, № 11, с. 164—166.
17. **Маклелан Дж. Х.** Многомерный спектральный анализ.— ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 139—152.

Поступила в редакцию 17 июля 1983 г.

УДК 681.325

С. С. КАРИНСКИЙ, В. А. ШУЛЬГИН

(Воронеж)

АНАЛОГО-ЦИФРОВОЕ И ЦИФРОАНАЛОГОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОДА ГРЕЯ

Создание интегральных схем АЦП и ЦАП для кодирования и декодирования аналоговых сигналов с частотами 10 МГц и более в настоящее время рассматривается в технике как качественное изменение в составе элементной базы радиотехнических устройств и в методах их реализации [1]. Проблема увеличения производительности АЦП и ЦАП актуальна в различных областях, важнейшие из которых — телевидение, радиолокация, ядерная техника, цифровая осциллография.

Преобразование аналогового сигнала в код Грея в ряде случаев осуществляется устройством, содержащим набор последовательно включенных каскадов. Единичная дистанция кода Грея, простота его перевода в позиционный код и относительно небольшой объем схемы АЦП определяют достоинства упомянутой структуры преобразователя [2].

В данном сообщении проанализирован известный способ реализации преобразования аналогового сигнала в код Грея, основанный на последовательном использовании операции свертки динамического диапазона