УДК 519.234

В. Г. АЛЕКСЕЕВ

(Москва)

ОБ ОЦЕНКАХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ГАУССОВЫХ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ. Ч. II

Настоящая статья, как и предшествующие работы [1, 2], посвящена статистическому оцениванию спектральных плотностей гауссовых однородных случайных полей. Аналогично [1, 2] оценку спектральной плотности $f(\boldsymbol{\lambda})$ случайного поля $\xi(\mathbf{k})$ будем искать в виде сглаженной (по аргументу $\boldsymbol{\lambda}$) периодограммы. Однако в отличие от указанных работ аргумент $\mathbf{k}$ случайного поля $\xi(\mathbf{k})$ будем предполагать уже не двумерным, а m-мерным, где $m = 3$ или 4. Как и в [2], будем во всех случаях стремиться к тому, чтобы уменьшить средний квадрат ошибки оценивания спектральной плотности $f(\boldsymbol{\lambda})$. Ниже будет показано, что с ростом размерности m аргумента $\mathbf{k}$ случайного поля $\xi(\mathbf{k})$ возрастает роль домножения исходной реализации исследуемого случайного поля на специально подбираемое окно данных, сглаживающее ее края.

1. Итак, пусть $\{\xi(\mathbf{k}),\ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^3\}$ — гауссово однородное случайное поле со средним $\langle \xi(k) \rangle = 0$ и спектральной плотностью $f(\boldsymbol{\lambda}) = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_j \in \Pi = (-\pi, \pi]$, $j = 1, 2, 3$. Воспользуемся предположением, что функция $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, будучи продолженной периодическим образом (по каждому из своих скалярных аргументов) на все пространство $\mathbf{R}^3$, имеет все интересующие нас частные производные. Пусть нам даны значения случайного поля $\xi(k_1, k_2, k_3)$ в точках (k_1, k_2, k_3), где $k_i = \overline{1, N_i}$, причем $N_i = N_i(n)$, $n \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, 3$, и $N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3$, $N_3 \to \infty$ при $n \to \infty$.

Оценку значения спектральной плотности $f(\boldsymbol{\lambda})$ в некоторой точке $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, где $(\omega_1, \omega_2) \in \Pi^2$ и $0 \leqslant \omega_3 \leqslant \pi$, будем искать в виде

$$f_n(\boldsymbol{\omega}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} I_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \prod_{j=1}^{3} \frac{1}{h} w\left(\frac{\lambda_j - \omega_j}{h}\right) d\lambda_j, \tag{1}$$

где $h = h(N_1, N_2, N_3) > 0$, а $w(x)$, $x \in \mathbf{R}$,— некоторая весовая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$w(x) = 0, \text{ если } |x| \geqslant 1, \quad w(-x) = w(x) \tag{2}$$

и

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, dx = 1, \quad \int_{-1}^{1} w^2(x)\, dx < \infty. \tag{3}$$

Что же касается периодограммы $I_n(\boldsymbol{\lambda})$, входящей в правую часть (1), то она определяется одним из следующих четырех соотношений:

$$I_n(\boldsymbol{\lambda}) = \left(8\pi^3 N_1 N_2 N_3\right)^{-1} \left| \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \sum_{k_3=1}^{N_3} \xi(k_1, k_2, k_3) \prod_{j=1}^{3} e^{-ik_j\lambda_j} \right|^2; \tag{4}$$

$$I_n(\boldsymbol{\lambda}) = \left(16\pi^3 L_1 N_2 N_3\right)^{-1} \left| \sum_{k_1=1}^{N_1} \varphi_1(k_1) \sum_{k_2=1}^{N_2} \sum_{k_3=1}^{N_3} \xi(k_1, k_2, k_3) \prod_{j=1}^{3} e^{-ik_j\lambda_j} \right|^2; \tag{5}$$

$$I_n(\boldsymbol{\lambda}) = \left(32\pi^3 L_1 L_2 N_3\right)^{-1} \left| \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \sum_{k_3=1}^{N_3} \frac{\xi(k_1, k_2, k_3)}{\exp(ik_3\lambda_3)} \prod_{j=1}^{2} \varphi_j(k_j)\, e^{-ik_j\lambda_j} \right|^2 \tag{6}$$

и

$$I_n(\boldsymbol{\lambda}) = \left(64\pi^3 L_1 L_2 L_3\right)^{-1} \left| \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \sum_{k_3=1}^{N_3} \xi(k_1, k_2, k_3) \prod_{j=1}^{3} \varphi_j(k_j)\, e^{-ik_j\lambda_j} \right|^2, \tag{7}$$

где

$$\varphi_j(k) = \sqrt{6/\left(2L_j^2 + 1\right)}\left(L_j - |L_j - k|\right), \quad k = \overline{1, 2L_j}, \tag{8}$$

и

$$L_j = \text{entier}\left[2^{-1}(N_j + 1)\right]. \tag{9}$$

Периодограмма (5) отвечает сглаживанию исходной реализации случайного поля $\xi(\mathbf{k})$ с помощью треугольного окна данных вдоль всех ее одномерных сечений, параллельных оси k_1. Периодограмма (6) аналогичным образом отвечает сглаживанию вдоль осей k_1 и k_2, а периодограмма (7) — сглаживанию вдоль всех трех координатных осей. Наконец, периодограмма (4) отвечает использованию исходной реализации без сглаживания.

Продолжим обсуждение условий, налагаемых нами на весовую функцию $w(x)$. Как и в [2], четное число $r \geqslant 2$ назовем порядком весовой функции $w(x) = w_r(x)$, если она, наряду с условиями (2), (3), удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_{-1}^{1} x^j w_r(x)\, dx = 0, \quad j = \overline{1, r-1}, \quad \int_{-1}^{1} x^r w_r(x)\, dx \neq 0.$$

Если, кроме того, предположить, что $h \leqslant \pi$, то оценка (1) может быть представлена в виде

$$f_n(\omega) = h^{-3} \int_{-2\pi}^{2\pi} d\lambda_1 \int_{-2\pi}^{2\pi} d\lambda_2 \int_{-\pi}^{2\pi} \left[\prod_{j=1}^{3} w\left(\frac{\lambda_j - \omega_j}{h}\right) \right] I_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, d\lambda_3.$$

В дальнейшем будем считать, что порядок r весовой функции фиксирован, а величина $h = h(n)$ выбирается при $n \to \infty$ в соответствии с соотношением

$$h^{2r+3} \sim (N_1 N_2 N_3)^{-1},$$

где символ $\sim$ обозначает пропорциональность двух величин.

Методами работы [2] легко могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $r = 2$ и $(N_2 N_3)^r = O\left(N_1^{r+3}\right)$. Тогда для оценки (1) с использованием периодограммы (4) справедливо асимптотическое соотношение

$$\langle |f_n(\omega) - f(\omega)|^2 \rangle = O((N_1 N_2 N_3)^{-2r/(2r+3)}).$$

Теорема 2. Пусть $r \geqslant 2$, $N_1^{r+3} = o\left((N_2 N_3)^r\right)$ и $(N_1 N_3)^r = O\left(N_2^{r+3}\right)$. Тогда для оценки (1) с использованием периодограммы (5) справедливо соотношение

$$\left\langle |f_n(\omega) - f(\omega)|^2 \right\rangle = O\left(\max\left[(N_1 N_2 N_3)^{-\frac{2r}{2r+3}}, N_1^{-4}\right]\right).$$

Теорема 3. Пусть $r \geqslant 2$, $N_2^{r+3} = o\left((N_1 N_3)^r\right)$ и $(N_1 N_2)^r = O\left(N_3^{r+3}\right)$. Тогда для оценки (1) с использованием периодограммы (6) справедливо соотношение

$$\left\langle |f_n(\omega) - f(\omega)|^2 \right\rangle = O\left(\max\left[(N_1 N_2 N_3)^{-\frac{2r}{2r+3}}, N_1^{-4}\right]\right).$$

Теорема 4. Пусть $r > 2$ и $N_3^{r+3} = o\left((N_1 N_2)^r\right)$. Тогда для оценки (1) с использованием периодограммы (7) справедливо соотношение

$$\left\langle |f_n(\omega) - f(\omega)|^2 \right\rangle = O\left(\max\left[(N_1 N_2 N_3)^{-\frac{2r}{2r+3}}, N_1^{-4}\right]\right).$$

Теоремы 2—4 нуждаются в пояснениях. Благодаря сглаживанию вдоль оси k_1 в условиях теоремы 2 достигается замена слагаемого $O\left(N_1^{-2}\right)$ в выражении для $\langle |f_n(\omega) - f(\omega)|^2 \rangle$ на $O\left(N_1^{-4}\right)$, а из-за дополнительного сглаживания вдоль оси k_2 в условиях теоремы 3 устраняется слагаемое $O\left(N_2^{-2}\right)$ в выражении для $\langle |f_n(\omega) - f(\omega)|^2 \rangle$. Наконец, вследствие дальнейшего сглаживания вдоль оси k_3 в условиях теоремы 4 устраняется слагаемое $O\left(N_3^{-2}\right)$.

Таким образом, если при $m = 2$ (т. е. в двумерном случае) можно было обойтись без сглаживания вдоль оси k_2, каково бы ни было соотношение между величинами N_1 и N_2, то при $m = 3$ желательно осуществить сглаживание вдоль всех трех координатных осей, если $r > 2$ и $N_3^{r+3} = o\left((N_1 N_2)^r\right)$.

2. Коротко остановимся на случае четырехмерного аргумента $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$. Будем считать, что нам даны значения случайного поля $\xi(\mathbf{k})$ для всех $\mathbf{k}$ таких, что $k_i = \overline{1, N_i}$, $N_i = N_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, и $N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3 \leqslant N_4$, $N_4 \to \infty$ при $n \to \infty$. Спектральную плотность $f(\boldsymbol{\lambda}) = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ снова будем предполагать имеющей все интересующие нас частные производные.

В этом случае нет такого значения порядка r весовой функции $w(x)$ и такого соотношения между величинами N_1, N_2, N_3 и N_4, при которых сглаживание вдоль оси k_1 с помощью окна данных, определенного формулами (8)—(9), было бы явно нецелесообразно. Сглаживание вдоль одной оси k_1 может быть рекомендовано лишь в том случае, когда $r = 2$ и $(N_1 N_3 N_4)^r = O\left(N_2^{r+4}\right)$. Во всех остальных случаях желательно сглаживание, по крайней мере, вдоль осей k_1 и k_2. Дополнительное сглаживание вдоль оси k_3 становится целесообразным, если $N_3^{r+2} = o\left((N_1N_2N_4)^r\right)$. Наконец, необходимость сглаживания вдоль всех четырех координатных осей возникает в том случае, когда $r > 2$ и $N_4^{r+2} = o\left((N_1N_2N_3)^r\right)$.

В заключение хотелось бы обратить внимание читателя на то обстоятельство, что сглаживание исходной реализации вдоль той или иной координатной оси хотя и уменьшает в указанных выше случаях смещение оценки $f_n(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$, но в то же время несколько увеличивает ее дисперсию. Поэтому следует воздерживаться от сглаживания в тех случаях, где это не вызвано необходимостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В. Г.** О равномерной сходимости оценок спектральной плотности гауссовского однородного случайного поля // Теория вероятностей и ее применения.— 1988.— **33**, № 4.
2. **Алексеев В. Г.** Об оценках спектральных плотностей гауссовых однородных случайных полей // Автометрия.— 1989.— № 1.

Поступило в редакцию 28 марта 1989 г.