РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 1

УДК 535.317.25

В. А. Удод

(Томск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРА ОДНОМЕРНОГО ФИЛЬТРА ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

В одномерном варианте рассмотрены изображающие системы с модельной структурой: входное изображение – заданная искажающая линейная система – заданный аддитивный белый шум – заданный линейный фильтр с регулируемым параметром – выходное изображение. Установлена максимальная разрешающая способность таких систем, достигаемая при оптимальном выборе параметра фильтра. Приведен пример использования полученных результатов и показана возможность их применения в сканирующих изображающих системах.

Введение. Вопросам повышения пространственной разрешающей способности (РС) по Фуко различных изображающих систем (ИС) традиционно уделяется значительное внимание специалистов, занимающихся обработкой информации об исследуемых объектах, получаемой в форме изображений. Одним из методов повышения РС ИС, как известно [1–4], является фильтрация сформированных изображений. В [5] в двумерном варианте решена вариационная задача оптимальной по критерию максимума РС линейной фильтрации сформированных изображений. Между тем вполне актуальной является задача оптимизации (по данному критерию) параметра одномерного фильтра заданного вида, включенного в структурный состав ИС. Это, в частности, характерно для временной фильтрации сигналов изображений в сканирующих ИС [6].

Модель изображающей системы и ее разрешающая способность. Предположим по аналогии с [2], что в одномерном варианте математическая модель функционирования ИС удовлетворительно представлена соотношением вида

$$\hat{B}(x) = [B(x) \otimes h(x) + \psi(x)] \otimes \varphi(x). \quad (1)$$

Здесь $\hat{B}(x)$ – изображение на выходе ИС; $B(x)$ – изображение на входе ИС; $h(x)$ – импульсный отклик искажающей системы; $\psi(x)$ – стационарный шум с нулевым средним значением; $B(x) \otimes h(x) + \psi(x)$ – сформированное (искаженное) изображение; $\varphi(x)$ – импульсный отклик фильтра; символ $\otimes$ означает одномерную свертку. Относительно функций $h(x)$ и $\varphi(x)$ предполагается, что они удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1. \qquad (2)$$

Предположим также, что пороговый контраст K обусловлен преимущественно зашумленностью выходного изображения, т. е. (см. [7])

$$K = \frac{M_{\text{пор}}\delta}{k_0}, \qquad (3)$$

где $M_{\text{пор}}$ – пороговое отношение сигнал/шум; $\delta = \sigma / B_{\text{ф}}$ – относительное среднеквадратическое значение шума на выходе ИС (σ – среднеквадратическое значение шума на выходе ИС, $B_{\text{ф}}$ – яркость фона выходного изображения); k_0 – исходный контраст. Тогда в одномерном варианте общее выражение для разрешающей способности R может быть представлено согласно [8] в следующем виде:

$$R = \begin{cases} \sup\{\bar{\nu} \mid 0 \le \bar{\nu} \le R_0,\ \inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} G(\nu) \ge K\}, & 0 \le K \le 1; \\ 0, & K > 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $\nu, \bar{\nu}$ – пространственные частоты;

$$R_0 = \sup\{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0,\ \inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} G(\nu) > 0\} \qquad (5)$$

– предельная РС; $G(\nu)$ – частотно-контрастная характеристика ИС.

Применительно к ИС, представленной моделью (1), с учетом (2) будем иметь

$$G(\nu) = \left|\tilde{h}(\nu)\right| \left|\tilde{\varphi}(\nu)\right|, \qquad (6)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) \left|\tilde{\varphi}(\nu)\right|^2 d\nu, \qquad (7)$$

где $\tilde{h}(\nu)$, $\tilde{\varphi}(\nu)$ – передаточная функция искажающей системы и фильтра соответственно (преобразование Фурье от $h(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно); $S(\nu)$ – спектральная плотность шума.

При подстановке (3), (6), (7) в (4), (5) получаем

$$R = \begin{cases} \sup\left\{ \bar{\nu} \mid 0 \le \bar{\nu} \le R_0,\ \inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu)\Phi(\nu) \ge C \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\Phi(\nu)\,d\nu \right\}, & \\ \qquad\qquad \text{если } 0 \le C \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\Phi(\nu)\,d\nu \le 1; & \\ 0, \qquad\qquad \text{если } C \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\Phi(\nu)\,d\nu > 1, & \end{cases} \qquad (8)$$

где

$$R_0 = \sup\{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0, \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu)\Phi(\nu) > 0\};$$

$$H(\nu) \equiv \left|\tilde{h}(\nu)\right|^2; \qquad \Phi(\nu) \equiv \left|\tilde{\varphi}(\nu)\right|^2; \qquad C = \left(\frac{M_{\text{пор}}}{k_0 B_{\text{ф}}}\right)^2.$$

Постановка задачи. Предположим теперь, что шум белый, т. е.

$$S(\nu) \equiv S, \tag{9}$$

а фильтр задан с точностью до параметра a ($a \ge 0$), и при этом

$$\Phi(\nu) \equiv \Phi(\nu; a) \equiv W(a\nu), \tag{10}$$

где $W(x)$ – некоторая заданная функция, причем $0 < \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\,dx < \infty$.

Подставив (9), (10) в (8), получим

$$R = R(a) = \begin{cases} \sup\left\{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0, \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} [H(\nu)W(a\nu)] \ge \frac{L}{a}\right\}, & a \ge L; \\ 0, & 0 \le a < L, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$L = CS \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\,dx = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Заметим, что в полученном выражении для РС $R(a)$ неравенство $\bar{\nu} \le R_0$ опущено в силу положительности L.

В предлагаемой работе оптимизационную задачу будем решать в следующей математической постановке: требуется найти максимум функции $R(a)$ ($a \ge 0$), определяемой равенством (11), в предположении, что функции $W(x)$ и $H(\nu)$ удовлетворяют условиям:

1а) $W(x)$ определена и неотрицательна для всех $x \in (-\infty, \infty)$;
1б) $H(\nu)$ определена и неотрицательна для всех $\nu \in (-\infty, \infty)$;
2а) $W(x)$ четная;
2б) $H(\nu)$ четная;
3а) $W(0) = 1$;
3б) $H(0) = 1$;
4а) $W(x)$ непрерывна в нуле;
4б) $H(\nu)$ непрерывна в нуле;
5) для любого $a \ge L$ справедливо равенство

$$\inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} [H(\nu)W(a\nu)] = \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} W(a\nu) \quad \text{для всех } \bar{\nu} \ge 0; \tag{13}$$

6) существует

$$\gamma = \max_{x \ge 0} [x \inf_{0 \le y \le x} W(y)].$$

Следует заметить, что условия 1–4 по существу являются «естественными» (следуют из свойств модуля одномерного преобразования Фурье [9] и соотношения (2)) и поэтому не ограничивают сколько-нибудь значительно общность постановки данной задачи.

Решение задачи. Решение сформулированной выше оптимизационной задачи представим в виде утверждения.

Утверждение. Максимум функции $R(a)$, определяемой (11), при условиях 1–6 есть

$$R_{\max} = \sup_{a \geq 0} R(a) = \sup \{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \geq 0,\ \gamma \inf_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} H(\nu) \geq L\bar{\nu}\} \qquad (14)$$

и достигается при

$$a_{\text{opt}} = x_0 / R_{\max}, \qquad (15)$$

где x_0 – произвольная точка наибольшего значения функции $x \inf_{0 \leq y \leq x} W(y)$ на промежутке $[0, \infty)$; L – постоянная, определяемая равенством (12).

(Доказательство утверждения приведено в приложении.)

Следствие. Если в ИС отсутствуют (пренебрежимо малы) систематические искажения, т. е. $\tilde{h}(\nu) \equiv H(\nu) \equiv 1$, то согласно (14) и (15) будем иметь

$$R_{\max} = \gamma / L; \qquad a_{\text{opt}} = x_0 (L / \gamma).$$

Пример оптимизации параметра фильтра. Рассмотрим применение утверждения:

– импульсный отклик искажающей системы есть функция вида

$$h(x) = \begin{cases} 1/b, & |x| \leq b/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad (16)$$

где параметр b $(b > 0)$ означает длину промежутка усреднения;

– импульсный отклик фильтра есть функция вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1/a)\exp(-x/a), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Тогда

$$\tilde{h}(\nu) = \frac{\sin \pi\nu b}{\pi\nu b}; \qquad \tilde{\varphi}(\nu) = \frac{1}{1 + 2\pi i\nu a}. \qquad (18)$$

Отсюда

$$H(\nu) = \frac{\sin^2 \pi\nu b}{(\pi\nu b)^2}, \qquad (19)$$

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2 a^2}. \qquad (20)$$

Из (10) и (20) следует, что в данном случае

$$W(x) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 x^2}, \tag{21}$$

и при этом согласно (12)

$$L = CS/2. \tag{22}$$

Заметим, что функция (18) (а значит, и функция (19)) считается доопределенной в точке $\nu = 0$ значением 1. Это следует из определения одномерного преобразования Фурье и того, что функция (16) удовлетворяет условию нормировки (2). С учетом такого замечания нетрудно видеть, что функции (19) и (21) удовлетворяют условиям 1–4. Далее, поскольку функция (19) монотонно убывает на отрезке $[0,\ 1/b]$, где $\nu = 1/b$ есть ее первый положительный нуль, а функция (20) монотонно убывает на промежутке $[0, \infty)$, то для всех $\bar{\nu} \geq 0$ будут верны следующие равенства:

$$\inf_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} \left[\frac{\sin^2 \pi\nu b}{(\pi\nu b)^2} \frac{1}{1 + 4\pi^2 \nu^2 a^2} \right] = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \pi\bar{\nu} b}{(\pi\bar{\nu} b)^2} \dfrac{1}{1 + 4\pi^2 \bar{\nu}^2 a^2}, & 0 \leq \bar{\nu} \leq 1/b; \\ 0, & \bar{\nu} > 1/b, \end{cases} \tag{23}$$

$$\inf_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} \frac{\sin^2 \pi\nu b}{(\pi\nu b)^2} = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \pi\bar{\nu} b}{(\pi\bar{\nu} b)^2}, & 0 \leq \bar{\nu} \leq 1/b; \\ 0, & \bar{\nu} > 1/b, \end{cases} \tag{24}$$

$$\inf_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} \frac{1}{1 + 4\pi^2 \nu^2 a^2} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 \bar{\nu}^2 a^2}. \tag{25}$$

Из (23)–(25) следует, что функции (19) и (21) удовлетворяют равенству (13) для любого $a \geq 0$, а значит, для этих функций условие 5 выполняется. Наконец, поскольку функция (21) монотонно убывает на промежутке $[0, \infty)$, то для всех $x \geq 0$ будет верно равенство

$$\inf_{0 \leq y \leq x} W(y) \equiv W(x) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 x^2}.$$

Следовательно,

$$\gamma = \max_{x \geq 0} \left[x \inf_{0 \leq y \leq x} W(y) \right] = \frac{1}{4\pi}, \tag{26}$$

и при этом (единственная) точка максимума

$$x_0 = 1/(2\pi). \tag{27}$$

Отсюда вытекает, что для функции (21) выполняется условие 6.

$b/(CS)$	$\pi CSR_{\max}$	$a_{\text{opt}}/(CS)$
0,1	0,50	1,00
1,0	0,46	1,09
3,0	0,35	1,43
5,0	0,27	1,85
10,0	0,17	2,94

Таким образом, функции (19) и (21) удовлетворяют всем условиям утверждения. Тогда при подстановке (19), (22) и (26) в (14) получим для максимума РС рассматриваемой ИС согласно утверждению следующее выражение:

$$R_{\max} = \sup\left\{ \bar\nu \mid \bar\nu \ge 0,\ \frac{1}{4\pi} \inf_{0 \le \nu \le \bar\nu} \frac{\sin^2 \pi\nu b}{(\pi\nu b)^2} \ge \frac{CS}{2}\,\bar\nu \right\}. \tag{28}$$

При этом согласно (15) и (27) оптимальный параметр фильтра

$$a_{\text{opt}} = 1/(2\pi R_{\max}). \tag{29}$$

Из (24) следует, что множество в фигурных скобках в (28) будет отрезком $[0, \hat\nu]$, где $\hat\nu$ – решение уравнения

$$\frac{\sin^2 \pi\bar\nu b}{(\pi\bar\nu b)^2} = 2\pi CS\bar\nu \tag{30}$$

относительно $\bar\nu$ на отрезке $[0,\ 1/b]$. А поскольку $\sup[0, \hat\nu] = \hat\nu$, то с учетом (28) окончательно получаем, что максимум РС равен решению уравнения (30) относительно $\bar\nu$ на отрезке $[0,\ 1/b]$.

Результаты численного решения уравнения (30) для различных значений параметра b искажающей системы представлены в таблице. Там же для удобства приведены соответствующие значения оптимального параметра фильтра, рассчитанного по формуле (29).

Заключение. Выражение (8) может быть интерпретировано для двумерного случая как продольная (вдоль оси O_x) РС ИС, импульсный отклик $\varphi_0(x, y)$ фильтра которой представим в виде

$$\varphi_0(x, y) = \varphi(x)\delta(y), \tag{31}$$

где $\delta(y)$ – δ-функция Дирака. При этом функции $H(\nu)$ и $\Phi(\nu)$ могут быть интерпретированы как квадраты продольной частотно-контрастной характеристики искажающей системы и фильтра соответственно, а функция $S(\nu)$ будет представлять собой спектральную плотность шума, проинтегрированную по переменной ν_y (пространственной частоте вдоль оси O_y) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

В частности, равенство (31) будет верно для ИС, в которых осуществляется непрерывное сканирование входных изображений вдоль оси O_x со скоростью θ, а возникающие при этом (на выходе искажающей системы) сигналы подвергаются временной фильтрации [6]. При этом импульсному отклику $\varphi_B(t)$ временного фильтра будет соответствовать функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\theta}\varphi_B\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

В рассмотренном выше примере функция (17) соответствует импульсному отклику временного RC-фильтра с постоянной времени a/θ.

Конкретными примерами ИС, где выполняется соотношение (31), могут служить некоторые типы сканирующих систем цифровой рентгенографии [10, 11]. Это позволяет использовать полученные в предлагаемой работе результаты (утверждение, следствие) для соответствующей оптимизации параметров временных фильтров, применяемых в данных системах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. При подстановке (13) в (11) получим

$$R(a) = \sup\left\{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0,\ \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} H(\nu) \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} W(a\nu) \ge \frac{L}{a}\right\},\ a \ge L. \tag{П1}$$

Таким образом, стоящая перед нами задача заключается в отыскании максимума функции (П1) при условиях 1–4, 6.

Обозначим множество в правой части (П1)

$$X(a) = \left\{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0,\ \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} H(\nu) \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} W(a\nu) \ge \frac{L}{a}\right\}\ (a \ge L) \tag{П2}$$

и множество в правой части (14)

$$X = \{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0,\ \gamma \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} H(\nu) \ge L\bar{\nu}\}. \tag{П3}$$

Принимая во внимание условия 3а и 3б, нетрудно убедиться, что система неравенств

$$\bar{\nu} \ge 0,\ \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} H(\nu) \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} W(a\nu) \ge \frac{L}{a}, \tag{П4}$$

определяющих множество $X(a)$ в (П2), будет эквивалентна системе неравенств

$$\bar{\nu} \ge 0,\ \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} H(\nu) a\bar{\nu} \inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} W(a\nu) \ge L\bar{\nu}. \tag{П5}$$

Из условий 1а и 1б следует согласно [12], что точные нижние границы $\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} H(\nu)$ и $\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}} W(a\nu)$ как функции от аргумента $\bar{\nu}$ будут определены и неотрицательны для всех $\bar{\nu} \ge 0$. Учитывая это и равенство

$$\{a\bar{\nu} \mid a \ge L,\ \bar{\nu} \ge 0\} = [0, \infty),$$

оценим сверху левую часть во втором неравенстве (П5):

$$\inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu)a\bar\nu \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} W(a\nu) \le \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu) \sup_{\substack{a\ge L\\ \bar\nu\ge 0}} [a\bar\nu \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} W(a\nu)] =$$

$$= \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu) \sup_{a\bar\nu\ge 0} [a\bar\nu \inf_{0\le a\nu\le a\bar\nu} W(a\nu)] = \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu) \sup_{x\ge 0} [x \inf_{0\le y\le x} W(y)] =$$

$$= \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu) \max_{x\ge 0} [x \inf_{0\le y\le x} W(y)] = \gamma \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu). \qquad (П6)$$

Из (П6) следует, что для любого $a \ge L$ система неравенств (П5) или система неравенств (П4), что то же самое, повлечет за собой систему неравенств

$$\bar\nu \ge 0,\ \ \gamma \inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu) \ge L\bar\nu,$$

а значит, согласно (П2) и (П3) будет верно включение

$$X(a) \subset X \ \text{ для всех } \ a \ge L. \qquad (П7)$$

Из (П7) вытекает (см. [13])

$$R(a) = \sup X(a) \le \sup X = \hat R \ \text{ для всех } \ a \ge L. \qquad (П8)$$

Таким образом мы нашли верхнюю границу $\hat R$ функции $R(a)$ из (П1). Покажем теперь, что

$$\hat R > 0. \qquad (П9)$$

Из условий 3а и 4а следует, что для $\varepsilon = 1/2$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$1/2 < W(x) < 3/2, \ \text{ если } \ x \in (-\delta, \delta).$$

Отсюда

$$W(x) \ge 1/2 \ \text{ для всех } \ x \in [0, \delta/2],$$

а значит, (см. [12])

$$\inf_{x\in[0,\,\delta/2]} W(x) \ge 1/2,$$

откуда получаем

$$\gamma = \max_{x\ge 0} [x \inf_{0\le y\le x} W(y)] \ge \frac{\delta}{2} \inf_{0\le y\le \delta/2} W(y) \ge \frac{\delta}{2}\frac{1}{2} > 0. \qquad (П10)$$

Далее, из условий 3б и 4б следует, что для $\varepsilon = 1/2$ существует $\Delta > 0$ такое, что

$$1/2 < H(\nu) < 3/2, \ \text{ если } \ \nu \in (-\Delta, \Delta).$$

Отсюда

$$H(\nu) \ge 1/2 \ \text{ для всех } \ \nu \in [0, \Delta/2].$$

Следовательно, (см. [12])

$$\inf_{\nu\in[0,\,\Delta/2]} H(\nu)\ge 1/2,$$

а значит, (см. [13])

$$\inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu)\ge 1/2 \ \text{ для всех } \ \bar\nu\in[0,\ \Delta/2]$$

или в силу положительности γ

$$\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu)\ge \gamma/2 \ \text{ для всех } \ \bar\nu\in[0,\Delta/2], \tag{П11}$$

что то же самое. Далее, из непрерывности функции $L\bar\nu$ в нуле имеем, что для $\varepsilon=\gamma/2$ $(\gamma>0$ по доказанному выше) существует $\Delta_0>0$ такое, что $|L\bar\nu|<\gamma/2$, если $\bar\nu\in(-\Delta_0,\Delta_0)$. Отсюда

$$L\bar\nu<\gamma/2 \ \text{ для всех } \ \bar\nu\in[0,\Delta_0/2]. \tag{П12}$$

Из (П11) и (П12) получаем

$$\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu)>L\bar\nu \ \text{ для всех } \ \bar\nu\in[0,\Delta_1],$$

где $\Delta_1=\frac{1}{2}\min\{\Delta_0,\Delta\}$. Отсюда и из (П3) следует, что $[0,\Delta_1]\subset X$, а значит, (см. [13])

$$\hat R=\sup X\ge\sup[0,\Delta_1]=\Delta_1>0,$$

что и доказывает справедливость неравенства (П9).

Покажем теперь, что

$$\hat R<\infty. \tag{П13}$$

Из условия 3б и свойства точной нижней границы имеем

$$\inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu)\le H(0)=1 \ \text{ для всех } \ \bar\nu\ge 0.$$

Из этого вытекает, что система неравенств

$$\bar\nu\ge 0,\ \ \gamma\inf_{0\le\nu\le\bar\nu} H(\nu)\ge L\bar\nu,$$

определяющая множество X, повлечет за собой систему неравенств $\bar\nu\ge 0$, $\gamma\ge L\bar\nu$. Следовательно, будет справедливо включение

$$X\subset\{\bar\nu\,|\,\bar\nu\ge 0,\ \gamma\ge L\bar\nu\}=\{\bar\nu\,|\,0\le\bar\nu\le\gamma/L\}=[0,\ \gamma/L],$$

а значит, (см. [13])

$$\hat R=\sup X\le\sup[0,\gamma/L]=\gamma/L,$$

что в силу положительности γ и L и доказывает справедливость неравенства (П13).

Докажем теперь справедливость включения

$$X \supset [0, \hat{R}). \tag{П14}$$

Действительно, из условия 1б согласно [12] следует, что точная нижняя граница $\inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu)$ как функция от аргумента $\bar{\nu}$ будет определена, неотрицательна и будет невозрастающей при $\bar{\nu} \ge 0$, а значит, с учетом положительности γ и L и функция $f(\bar{\nu}) = \gamma \inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) - L\bar{\nu}$ будет определена и невозрастающей при $\bar{\nu} \ge 0$. Отсюда и из (П3) имеем

$$X = \{\bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0,\ f(\bar{\nu}) \ge 0\}. \tag{П15}$$

Так как функция $f(\bar{\nu})$ определена и не возрастает при $\bar{\nu} \ge 0$, то множество X в виде (П15) может быть согласно [14, 15] только одним из множеств вида $[0, \nu_0)$, где $0 < \nu_0 < \infty$, или $[0, \nu_0]$, где $0 \le \nu_0 < \infty$. Отсюда с учетом соотношений $\sup X = \hat{R} > 0$ вытекает справедливость включения (П14).

Докажем теперь справедливость неравенства

$$x_0 / \hat{R} \ge L. \tag{П16}$$

Доказано, что $X \supset [0, \hat{R})$. Тогда отсюда и из (П3) имеем

$$\gamma \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) \ge L\bar{\nu} \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}) \tag{П17}$$

или

$$L\bar{\nu} - \gamma \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) \le 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}), \tag{П18}$$

что то же самое.

При доказательстве включения (П14) было отмечено, что функция $f(\bar{\nu}) = \gamma \inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) - L\bar{\nu}$ определена и не возрастает при $\bar{\nu} \ge 0$. Следовательно, противоположная ей по знаку функция $g(\bar{\nu}) \equiv -f(\bar{\nu})$, стоящая в левой части неравенства (П18), будет определена и неубывающей при $\bar{\nu} \ge 0$, а значит, и на промежутке $[0, \hat{R})$. Кроме того, согласно (П18) функция $g(\bar{\nu})$ ограничена сверху нулем на промежутке $[0, \hat{R})$. Таким образом, согласно теореме о пределе монотонной функции [12] при $\bar{\nu} \to \hat{R} - 0$ функция $g(\bar{\nu})$ имеет конечный левый предел, причем

$$\lim_{\bar{\nu} \to \hat{R} - 0} g(\bar{\nu}) = \lim_{\bar{\nu} \to \hat{R} - 0} [L\bar{\nu} - \gamma \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu)] = \sup_{\bar{\nu} \in [0, \hat{R})} [L\bar{\nu} - \gamma \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu)]. \tag{П19}$$

Далее, как было отмечено при доказательстве включения (П14), функция $\inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu)$ от аргумента $\bar{\nu}$ определена, неотрицательна и не возрастает при $\bar{\nu} \ge 0$. Значит, в силу положительности γ функция $-\gamma \inf\limits_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu)$ от аргумента $\bar{\nu}$ будет определена, неубывающая и ограничена сверху нулем на промежутке $[0,\hat{R})$. Отсюда по теореме о пределе монотонной функции [12] вытекает, что при $\bar{\nu}\to\hat{R}-0$ функция $-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)$ имеет конечный левый предел, причем

$$\lim_{\bar{\nu}\to\hat{R}-0}[-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]=\sup_{\bar{\nu}\in[0,\hat{R})}[-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]. \qquad (\text{П}20)$$

По доказанному $0<\hat{R}<\infty$. В результате в силу непрерывности функции $L\bar{\nu}$ получаем

$$\lim_{\bar{\nu}\to\hat{R}-0}[L\bar{\nu}]=L\hat{R}. \qquad (\text{П}21)$$

Поскольку функции $L\bar{\nu}$ и $-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)$ имеют конечные односторонние пределы при $\bar{\nu}\to\hat{R}-0$, то согласно [16] будем иметь

$$\lim_{\bar{\nu}\to\hat{R}-0}[L\bar{\nu}-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]=\lim_{\bar{\nu}\to\hat{R}-0}[L\bar{\nu}]+\lim_{\bar{\nu}\to\hat{R}-0}[-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]. \qquad (\text{П}22)$$

Подставляя теперь правые части равенств (П19)–(П21) в (П22), получим

$$\sup_{\bar{\nu}\in[0,\hat{R})}[L\bar{\nu}-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]=L\hat{R}+\sup_{\bar{\nu}\in[0,\hat{R})}[-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]. \qquad (\text{П}23)$$

Из (П18) согласно [12] следует, что

$$\sup_{\bar{\nu}\in[0,\hat{R})}[L\bar{\nu}-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]\le 0.$$

Отсюда и из (П23) имеем

$$L\hat{R}+\sup_{\bar{\nu}\in[0,\hat{R})}[-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)]\le 0. \qquad (\text{П}24)$$

С другой стороны,

$$-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)\le\sup_{\bar{\nu}\in[0,\hat{R})}[-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)] \text{ для всех } \bar{\nu}\in[0,\hat{R}). \qquad (\text{П}25)$$

Из (П24) и (П25) окончательно получаем

$$L\hat{R}-\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)\le 0 \text{ для всех } \bar{\nu}\in[0,\hat{R})$$

или

$$\gamma\inf_{0\le\nu\le\bar{\nu}}H(\nu)\ge L\hat{R} \text{ для всех } \bar{\nu}\in[0,\hat{R}), \qquad (\text{П}26)$$

что то же самое.

Пусть теперь x_0 – произвольная точка наибольшего значения функции $x \inf\limits_{0 \le y \le x} W(y)$ на промежутке $[0, \infty)$ (по условию 6 такая точка существует). Тогда

$$\gamma = x_0 \inf_{0 \le y \le x_0} W(y). \tag{П27}$$

Доказано, что $\gamma > 0$, следовательно, $x_0 > 0$. Подставляя (П27) в (П26), получим

$$x_0 \inf_{0 \le y \le x_0} W(y) \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) \ge L\hat{R} \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}). \tag{П28}$$

Из условий 1а, 1б, 3а, 3б и положительности x_0 имеем

$$x_0 \inf_{0 \le y \le x_0} W(y) \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) \le x_0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}).$$

Отсюда и из (П28) получаем $x_0 \ge L\hat{R}$, что и доказывает с учетом положительности $\hat{R}$ справедливость (П16).

Докажем, наконец, что граница $\hat{R}$ достигается при

$$a = a_0 = x_0 \big/ \hat{R}. \tag{П29}$$

Поскольку доказано, что $a_0 \ge L$, то при подстановке (П29) в (П2) с учетом положительности x_0 и $\hat{R}$ получим

$$X(a_0) = \left\{ \bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0, \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} W(a_0 \nu) \ge \frac{L}{a_0} \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0, \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) x_0 \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} W\left(\frac{x_0}{\hat{R}} \nu \right) \ge L\hat{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0, \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) x_0 \inf_{0 \le \frac{x_0}{\hat{R}} \nu \le \frac{x_0}{\hat{R}} \bar{\nu}} W\left(\frac{x_0}{\hat{R}} \nu \right) \ge L\hat{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{\nu} \mid \bar{\nu} \ge 0, \inf_{0 \le \nu \le \bar{\nu}} H(\nu) x_0 \inf_{0 \le y \le \frac{x_0}{\hat{R}} \bar{\nu}} W(y) \ge L\hat{R} \right\}. \tag{П30}$$

Так как x_0 и $\hat{R}$ положительны, то

$$0 \le x_0 \frac{\bar{\nu}}{\hat{R}} < x_0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}). \tag{П31}$$

Из условия 1а и положительности x_0 и $\hat{R}$ согласно [12] следует, что функция $F(\bar{\nu}) = \inf\limits_{0 \le y \le \frac{x_0}{\hat{R}} \bar{\nu}} W(y)$ будет определена, неотрицательна и будет невозрастающей при $\bar{\nu} \geq 0.$ Отсюда и из (П31) получаем

$$\inf_{0 \leq y \leq \frac{x_0}{\hat{R}}\bar{\nu}} W(y) \geq \inf_{0 \leq y \leq x_0} W(y) \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}). \tag{П32}$$

Как было отмечено выше, точная нижняя граница $\inf\limits_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} H(\nu)$ как функция от аргумента $\bar{\nu}$ будет определена и неотрицательна при $\bar{\nu} \geq 0.$ С учетом этого, неравенства (П32) и положительности x_0 будем иметь

$$\inf_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} H(\nu) x_0 \inf_{0 \leq y \leq \frac{x_0}{\hat{R}}\bar{\nu}} W(y) \geq \inf_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} H(\nu) x_0 \inf_{0 \leq y \leq x_0} W(y) \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}). \tag{П33}$$

Из (П28) и (П33) следует

$$\inf_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} H(\nu) x_0 \inf_{0 \leq y \leq \frac{x_0}{\hat{R}}\bar{\nu}} W(y) \geq L\hat{R} \quad \text{для всех} \quad \bar{\nu} \in [0, \hat{R}).$$

Отсюда и из (П30) вытекает, что $[0, \hat{R}) \subset X(a_0).$ Но тогда [13]

$$\sup[0, \hat{R}) = \hat{R} \leq R(a_0) = \sup X(a_0).$$

Отсюда и из выражения (П8) получаем $R(a_0) = \hat{R}.$ Учитывая равенство $\sup\limits_{a \geq 0} R(a) = \sup\limits_{a \geq L} R(a)$ согласно (11), окончательно имеем

$$\sup_{a \geq 0} R(a) = R(a_0) = \hat{R}.$$

Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
2. **Обработка** изображений при помощи цифровых вычислительных машин: Пер. с англ. /Под ред. Г. Эндрюса, Л. Инло. М.: Мир, 1973.
3. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Кн. 2.
4. **Обработка** изображений и цифровая фильтрация: Пер. с англ. /Под ред. Г. Хуанга. М.: Мир, 1979.
5. **Завьялкин Ф. М., Удод В. А.** Максимальная разрешающая способность изображающих систем, достигаемая при апостериорной линейной фильтрации изображений // Автометрия. 1992. № 3. С. 75.
6. **Смирнов А. Я., Меньшиков Г. Г.** Сканирующие приборы. Л.: Машиностроение, 1986.
7. **Гурвич А. М.** Квантовые флуктуации и их роль в прикладной рентгенолюминесценции // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. **46**, № 5.

8. **Удод В. А.** Корректное формальное описание критерия пространственной разрешающей способности по Фуко // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2002. **9**, вып. 2. С. 473.
9. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: Пер. с франц. М.: Мир, 1983. Т. 1.
10. **Недавний О. И., Удод В. А.** Современное состояние систем цифровой рентгенографии (обзор) // Дефектоскопия. 2001. № 8. С. 62.
11. **Недавний О. И., Удод В. А.** Математическая модель многоканальных сканирующих систем цифровой рентгенографии // Контроль. Диагностика. 2002. № 2. С. 27.
12. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 1.
13. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
14. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
15. **Рудин У.** Основы математического анализа: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
16. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.

Томский государственный университет,
E-mail: udod@ef.tsu.ru

Поступила в редакцию
21 марта 2003 г.